# Дифференциальные уравнения.

*Нефедов Николай Николаевич.*

# Глава 1. Введение.

## *§1. Основные понятия.*

1. Понятие диффиренциального уравнения. Хорошо известно, что моделями многих процессов выступают уравнения разных классов:
   1. конечные (алгебраические)уравнения. F(x,y)=0.
   2. Интегральные уравнения. Неизвестная функция входит под знак интеграла. Y(x) = $\int k(x,s)y(s)ds$ +f(t).
   3. Диффиренциальные уравнения. Уравнения, в которых искомая функция находится под знаком производной.

Определение 1. Диффиренциальным уравнением, в которое входит функция одной переменной называется *обыкновенным диффиренциальным уравнением*, сокращенно ОДУ. Примеры.

(1) $y'=f(x,y)$ .

(2) $f(x,y,y')=0$ .

(3) $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ .

(4) $f(x,y,...,y^{(n)})$ .

Уравнения в примерах (1) и (3) называются *разременными относительно старшей производной*. Уравнения в примерах (2) и (4) – *неразрешенными*. Мы будем заниматься только разрешенными уравнениями.

Определение 2. порядком ДУ называется порядок старшей его производной.

Определение 3. Диффиренциальное уравнение, в которое взодит функция многих переменных и её ЧП, называется уравнением в частных производных (УЧП). Примеры.

(1): $a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$ - уравнения переноса

(2): $\Delta u=0$

(3): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

(4): $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - уравнение теплопроводности

Определение 4. Нормальная система ОДУ система уравнений первого порядка, имеющая вид:

$y_i'=f_i(x,y_{1,}y_{2,}...)$

## Решение ДУ.

Определедление 5. Решением ДУ называется функция, обращающая при подстановке в уравнение это уравнение в тождество. Конкретная функция, являющаяся решением, называется частным решением дифура. Общим решением называется множество, содержащее все частные решения.

Пример. $y''+y=0$ . Решения: $y_1=\sin(x), y_2=\cos(x), y_3=\sin(x)+\cos(x)$ . Набор $y_i$ есть частные решения. Все же решения (общее решение) выражаются как $y(a_{1,}a_2)=a_1\sin(x)+a_2\cos(x)$ . Введем еще одно понятие.

Определение. Процесс нахождения решения дифура называется интегрированием дифура.

Определение 6. Если уравнение $\phi(x,y,c)=0$ , где с – параметр, описывает (неявно задает) все множество решений соответствующего ДУ, то то это уравнение называется общим интегралом, а функцию $y=y(x,c)$, содержащую все решения ДУ называют общим решением.

Пример. $y'=f(x)$. Тогда $\phi(x,y,c)=y-\int f(x)dx-c$ - общий интеграл этого ДУ, а частное решение представляется в виде $y=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$.

Еще пример. $y''+y=0.$. $\phi(x,y,c)=c_1\sin(x)+c_2*\cos(x)$.

<u>Определение.</u> Уравнение считается *интегрированным в квадратурах*, если его решение выражено через интеграл (первообразную), который, возможно, не выражается в элементарных функциях. Т.е. (Ответ можно выписывать в интегралах и не париться).

## Постановка задачи и дополнительные условия.

Обычно требуется из кучи решений выделить одно, и для этого служат дополнительные условия. Для ОДУ задается некоторое число дополнительных условий (обычно равное порядку уравнения). Можно выделить 4 класса задач:

1. Задача Коши (она же – начальная задача). $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$,
   $y''=f(x,y,y');y(x_0)=y_0;y'(x_0)=y_0'$
2. Коаевая задача (двухточечная) :
   первая краевая задача (Дирихле): $y''=f(x,y,y'),x\in[a,b].y(a)=y_a;y(b)=y_b$
   вторая краевая задача (Неймана) $y''=f(x,y,y'),x\in[a,b].y'(a)=y_a';y'(b)=y_b'$
   Треться краевая задача
   $y''=f(x,y,y'),x\in[a,b].\alpha y(a)+\alpha' y'(a)=y_a;\beta y(b)+\beta' y'(b)=y_b;$
3. Периодическая задача
   $y'=f(y,t)$, но $y(t)=y(t+T)$
4. Краевая задача Штурма-Лиувилля. $y''+\lambda y=0;y(0)=y(1)=0$. Постановка задачи звучит так: нужно найти те значения параметра $\lambda$, при которых задача имеет нетривиальные решения. Эти значения называются собственными значениями, а соответствующие функции – собственными функциями.

   При $\lambda=0$ $y''=0$, значит $y'=const$, значит $y=0$. $\lambda=0$ не собственное.

   Пусть $\lambda<0$ собственное Рассмотрим решение $f(x)\neq 0$. Она непрерывна, значит достигает своего максимума, $max\neq 0$. В этой точке $f''\leq 0$.

   Пусть $\lambda>0$. В этой точке $y(x)=c_1\sin(\sqrt{(\lambda)}x)+c_2\cos(\sqrt{(\lambda)}x)$. Подставим условия. $y(0)=0$. Получим, $c_2=0$. $y(1)=0$ $\sqrt{(\lambda)}\,кратно\,\pi$, то есть $\lambda=pi^2 n^2$, поэтому $y(x)=c\sin\pi n x$

<u>Теорема (Стеклова)</u>. Любая дважды непрерывно дифференцируемая на (0,1) функция, удовлетворяющая однородным краевым условиям, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Под однородными условиями понимают $y(0)=y(1)=0$.

---

Начало следующей лекции – 13-15.

## Геометрическая интерпретация для ОДУ.

Рассмотрим ОДУ первого порядка: $y'=f(x,y)$, и пусть $y=y(x)$ - некоторое частное решение этого уравнения. Если изобразить это решение на координатной плоскости, то график этой функции называется интегральной кривой. Тогда $y'$ суть тангенс угла наклона, но с другой стороны, это и есть $f(x,y)$. Еще раз: $f(x,y)=tg\alpha$. Поэтому, если в каждой точке D провести линию, совпадающую с касательной, то получим т.н. поле направлений. Решение ОДУ тогда можно интерпретировать как поиск кривой, имеющей в каждой точке области D заданной уравнением касательной или же уравнением направления.

Решение задачи Коши можно интерпретировать как нахождение интегральной кривой, выходящей из заданной точки и имеющей в каждой точке заданное уравнением направление.

*Иными словами:* $f(x, y)$ *определяет тангенс угла наклона в каждой точке плоскости. Тогда если есть заданная начальная точка, то путь из нее всегда однозначно задан. Вот этот-то путь и есть решение.*

## §2. Некоторые физические задачи, приводящие к ДУ

### Уравнения одного параметра

**Радиоактивный распад.**

$\frac{\partial x}{\partial t} = -k\,x\,; k > 0$ . Здесь x – количество еще не разложившегося вещества. $\frac{dx}{dt}$ - скорость распада пропорциональна количеству вещества.

Решение. $x = C\,e^{-kt}$ , $C$ – количество вещества в начале.

**Движение материальной точки на прямой.**

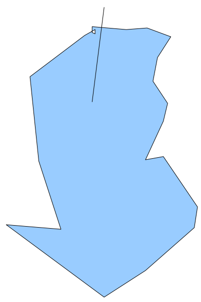
$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f(x, t)$ - второй закон Ньютона. Начальные условия: $x(t=t_0)=x_0$ , $x'(t=t_0)=v_0$ . Заметим, *два* начальных условия.

**Движение материальной точки в пространстве.**

$m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = f(\vec{r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, t)$ . Векторной уравнение 2 порядка. Можно переписать по компонентам. Требует 2*3=6 начальных условий: $\vec{r}(0)=\vec{r}_0; \vec{r}'(0)=\vec{v}_0$ .

**Колебания физического маятника**

$y'' - w^2 \sin y = 0; w^2 = \frac{mgS}{J_0}$ , но $J_0 = mS^2$ - момент инерции математического маятника. Если $y$ мало, то уравнение линеаризуется: $y' + w^2\, y = 0$ .



### Уравнения в частных производных.

**Малые колебания струны.**

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ . Коэффициент a предполагается постоянным и равным $\frac{t_0}{\rho_0}$ , где $t_0$ - натяжение, а $\rho_0$ - плотность. $f(x, t)$ - линейная плотность внешних сил.

Пусть $x \in [0, l]$ . Чтобы описать это движение, требуются граничные условия. Например, если концы струны закреплены, то задаются граничные условия $u(0)=u(l)=0$ (задача Дирихле). По времени это уравнение – тоже 2 порядка. Задаем начальные условия: $u(t_{0,}x)=\phi(x); \frac{\partial u}{\partial t}(t_{0,}x)=\xi(x)$ .

**Уравнение Пуассона.**

$\Delta u = 4\,\pi\,\rho$ . Вводят начальные условия $u_{на\,\partial D} = g(x)$ .

**Уравнение теплопроводности**

$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}f(x,t); x\in[0,1]$ описывает поле температур в тонком однородном стержне.

Граничные условия: $u(0,t)=u(1,t)=0$

Начальные условия: $u(x_0,0)=\phi(x)$

## § 3. Связь УЧП (уравнений в частных производных) и ОДУ

ОДУ – инструмент рассмотрения многих классов УЧП.

**Метод (преобразований) Лапласа.**

В уравнении теплопроводности предполагается $f\ identy\ 0$ .

$$U(x,t)\rightarrow u(x,p)=\int_0^\infty M(x,t)e^{-pt}dt$$

$$pU(x,p)-fi(x)=d^{2\mathrm{U}}/dx^2$$

$$U(0,p)=U(l,p)=0 \quad .$$

**Метод Фурье.**

Ищем решение в виде $U(x,t)=\sum_1^\infty c_n(t)\psi_n(x)$ , где $\psi_n$ - ортонормированная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Для нее есть уравнение.

$\frac{d^2\psi_n}{dx^2}+\lambda\psi_n=0; x\in[o,l]; \psi_n(0)=\psi_n(l)=0$ . Подставляем это счастье (искомое представление) в задачу. Также используем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\sum_1^\infty\frac{dc_n}{dt}\psi_n(x)=a^2\sum_1^\infty c_n(t)=-a^2\sum_1^\infty c_n(t)\psi_n(x)\lambda_n \quad .$$

Умножаем скалярно на $\psi_n(x)$ все части этого уравнения. Помним ,что система ортонормированная. $\frac{dc_k}{dt}=-a^2\lambda_n c_k$ Куда делась сумма? Перемножение перпендикулярных векторов даем 0! Все сократилось. Итак: $c_k=b_k\exp(-a^2\lambda_n t)$ .

Итак, $U(x,t)=\sum_1^\infty b_n\exp(-a^2\lambda_n t)\psi_n$ . Видно, что $b_n$ -- коэффициенты Фурье:

$b_k=\int_0^\infty u(x)\psi_k(x)dx$ . Метод Фурье – один из методов разделения переменных в УЧП.

# Глава 2. ОДУ первого порядка.

## *§1. Простейшие ОДУ, интегрируемые в квадратурах*

Напоминание. ОДУ называется *интегрируемым*, если найдено его решение, или интеграл, задающий решение неявно. Если интеграл или решение выражается через неопределенные интегралы (первообразные), которые, возможно, не вычисляются в элементарных функциях, то уравнение называется интегрированным в квадратурах.

**Уравнение с разделяющимися переменными**. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{f_1(x)}{f_2(y)}$ , $f_2(y)\neq 0$ в интересующей нас области. Решение. $f_2(y)dy=f_1(x)dx$ , значит, $\int f_1(x)dx-\int f_2(y)dy=C$ .

**Линейное уравнение.** Линейным уравнением первого порядка называют такое уравнение: $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x,y)$ . $p,f$ - непрерывны при $x\in X$ .

*Однородное уравнение.* $f(x,y)\equiv 0$ . Решается делением переменных. Здесь $y\neq 0$ . Получаем в результате $y(x)=Ce^{(-\int p(x)dx)}$ .

Теорема 1. Представление $y(x)=Ce^{(-\int p(x)dx)}$ дает общее решение уравнения.

Доказательство. Введем в рассмотрение функция $\phi(x)=\mathit{fi}(x)e^{(\int p(x)dx)}$ - произвольное решение. Ищем $\frac{d\phi}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}e^{(\int p(x)dx)}+p(x)\varphi(x)e^{\int p(x)dx}=e^{\int p(x)dx}(\frac{d}{dx}u+p(x)\varphi(x))=0$ . Поэтому $\phi(x)=const$ , то есть любое решение представимо в виде $y(x)=Ce^{(-\int p(x)dx)}$ . Доказано.

Если рассматривается задача Коши, то есть для нашего уравнения задается начальное условие, то $y(x)=y_0\,e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$

Теорема 2. Однородное линейное уравнение с нулевым начальным условием имеет своим решением 0 (тривиальное решение), и только его.

**Линейное неоднородное уравнение**. Метод Вариации постоянных. $\frac{dy}{dx}+p(x)=f(x)$ . Решение ищется в виде $C(x)\exp(-\int p(x)dx)$ . Надо доказать, что это решение существует. Подставим «решение» в уравнение.

$\frac{dc}{dx}\exp(\int p(x)dx)-C(x)p(x)\exp(\int dx)+C(x)p(x)\exp()=f(x)$ Сокращаем, умножаем и находим c(x) $c(x)=\int f(x)\exp(\int p(x)dx)dx+c_1$ . Итак, $y_0(x)=C_1e^{-(\int p(x)dx)}+e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ . Обозначим

Решение линейного однородного уравнения представимо в виде общего решения y_0 и некоторого частного решения y'.

Поставим для нашего уравнения задачу Коши: $y(x_0)=y_0$ .

Теорема 3 о существовании и единственности.

Пусть $p(x),f(x)\in C[a,b]$ . Тогда для любых $x_{0,}\,y^0\in a<x<b;-\mathit{inf}<y<\mathit{inf}\;\exists!$ интегральная кривая, проходящая через точку $x_{0,}\,y^0$ и определенная при $a\leq x\leq b$ .

Доказательство.

Выберем решение в специальном виде: $y(x)=y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}+e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\int_{x_0}^{x} f(\xi)e^{\int_{x_0}^{\xi} p(s)ds}$ .

Мы конкретизировали константы и интегралы. То же самое равно $y(x)=y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}+\int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x_0} p(s)ds} f(\xi)\,d\xi$ . Полученное суть решение по построению; условию Коши оно очевидно удовлетворяет, осталось доказать единственность.

Пусть есть два решения: $y_{12}(x)$ . Составим $v(x)=y_1(x)-y_2(x)$ . Из линейности несложно получить, что $v(x)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению. $\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$ с нулевым начальным условием $v(x_0)=0$ . В силу теоремы 2 эта задача имеет только нулевое решение, а значит $v(x)=0$ , что значит, что $y_1(x)=y_2(x)$ .

Теорема 3 доказана.

## *§2. теорема существования и единственности решения задачи Коши для скалярного ОДУ*

### 1. Постановка задачи и основной результат.

Мы будем говорить об уравнениях вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\quad,\quad y(x_0)=y_0\ .\qquad (1)$$

пусть $f(x,y)$ определена в области $G$ плоскости $(x,y)$ . Пусть $D\{|x-x_0|\le a;|y-y_0|\le b\}\in G$ , и пусть

(У1) $f(x,y)\in C[D]$

(У2) $f(x,y)$ удовлетворяет в $D$ условию Липшица (по переменной $y$ ): $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|$ . $N$ - постоянная Липшица – не зависит от x и y.

Следствие из (У1). Так как $f(x)\in C$ b ограничена, то $\exists M>0\ (M=sup(|f(x,y)|)): f(x,y)\le M$ .

Еще следствие. Для того, чтобы интегральная кривая (если она есть) не покидала нашего прямоугольника через его горизонтальную границу мы должны рассмотреть наш прямоугольник на промежутке $D_{zv}:\{|x-x_0|\le h;|y-y_0|\le b: h=min(a,\frac{b}{M})\}; M=sup(|f(x,y)|)$ . В самом деле: тангенс угла наклона кривой всегда меньше либо рамен M, поэтому кривая «слишком некрута», чтобы вылезти из построенного прямоугольника.

Итак. *При так построенном прямоугольнике кривая не покинет прямоугольник по меньшей мере до величины* $h$ .

Теорема 5. Пусть выполнены условия У1 и У2. Тогда решение задачи (1) существует и единственно на промежутке $[x_0-H,x_0+H]$ .

## 2. Метод последовательных приближений (метод Пикаре)

Лемма 1. Пусть выполнено условие (У1). Тогда задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,y(\xi)\,d\xi \qquad (*)$$

, которое рассматривается в классе непрерывных решений.

Доказательство.

Пусть $y(x)$ - решение задачи (1). Тогда, интегрируя полученное тождество получим, что $y(x)$ - решение уравнения (*). Делается очевидно.

Пусть $y(x)$ - непрерывное решение (*). Тогда $f(x,y(x))\in C[D]$ . Тогда интеграл от (*) непрерывно-диффиренцируемая функция, производная которой равна $y'$ . Поэтому $y(x)$ - решение задачи (1)

Для решения задачи (1) применим метод последовательных приближений. Сам метод состоит в следующем. В нелинейой части индекс (?) понижается.

$$y_n'=f(x,y_{n-1}(x));\ y_n(x_0)=y_0 \qquad (2).$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ выберем любую непрерывную функцию график которой целиком лежит в $D$ .

Лемма 2. Итерационная задача (2) разрешима на каждом шаге при $x\in D_{zv}$ и её решение представимо в виде $y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,y_{n-1}(\xi)\,d\xi$ .

Доказательство. Действительно, в силу условия $|f|\le M$ имеем то, что интегральная кривая $y_n(x)$ не покидает $D_{zv}$ и, следовательно, $f(\xi,y_n(\xi))$ непрерывна. Этого достаточно для прямого интегрирования. Доказано.

В результате решения задачи из (2) получаем итерационную последовательность $y_n(x)$ . Докажем, что эта последовательность сходится, причем равномерно.

Лемма 3. Функциональная последовательность $y_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство. Введем в рассмотрение функциональный рад $s(x)=y_1(x)+(y_2(x)-y_1(x))+...+(y_n(x)-y_{n-1}(x))$ . Частичная сумма порядка $S_n(x)=y_n(x)$ . Докажем сходимость ряда $\sum y_n-y_{n-1}$ .

Для членов ряда есть следующие оценки.

$$|y_2(x)-y_1(x)|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f(\xi)\,y_1(\xi)-f(\xi)\,y_0(\xi)|\,d\xi\le N\int\limits_{x_o}^{x}|y_1(\xi)-y_0(\xi)|\le 2\ bN(x-x_0)$$

$$|y_3-y_2|\le 2\ bN^2\frac{(x-x_0)^2}{2!}\le 2\ bN^2\frac{h^2}{2!} \ .$$

Закономерность ясна, да? Применяя метод математической индукции, получим:

$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le 2\mathrm{b}\,N^{n-1}\dfrac{x-x_0^{(n-1)}}{(n-1)!}\le 2\mathrm{b}\dfrac{(Nh)^{n-1}}{(n-1)!}$ . В силу того, что члены нашего ряда мажорируются по модулю числовым рядом, сходимость которого очевидна (по признаку Даламбера), то по признаку Вейерштрасса ряд $s(x)$ сходится абсолютно и равномерно. Лемма доказана.

Замечание. $s(x)$ сходится равномерно, а значит, сходится к непрерывной функции.

Замечание Мы рассматривали только промежуток $[x_0; x_0+h]$. Остальное доказывается аналогично.

Лемма 4. Функциональная последовательность $y_n(x)$ сходится к решению уравнения (*).

Доказательство. Перейдем к пределу при $n \to inf$ в левой и правой частях соотношения (2). Предел слева равен $y(x)$ В правой части этого соотношения, в силу равномерной сходимости, возможен предельный переход под знаком интеграла и под знаком функции. В результате получим, что $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)y(\xi)d\xi$, то есть уравнению (*). Доказано.

Замечание. Как было доказано выше, уравнение (*) равносильно исходной задаче (1). Поэтому, теорема существования доказана.

послать qzma@list.ru

*Лекция от 7 марта 2006*

Лемма 5. Решение интегрального уравнения (*) (а значит, и задачи (1)) единственно.

Доказательство. Предположим противное: пусть есть два решения уравнения *: $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Введем функцию $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$; наша задача – показать, что $z(x)=0\ \forall x$. $z(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)(y_1(\xi)-y_2(\xi))d\xi; x\in(x_{0..}x_0+H)$ Оценим $|z(x)|$:

$$|z(x)|\leq N\,sup(|y_1(x)-y_2(x)|)(x-x_0) \qquad (5)$$

Выделим два случая: $NH<1$ и $NH\geq 1$. В первом случае можно получить: $max_{x0..x0+H}\, mod\, z(x)\leq NH\, max_{x_0..x_0+h} z(x)$. Отсюда следует, что $z(x)=0$

Во стором случае применим (5) на промежутке $x_0..x_0+x_1$, $x1: N(x_1-x_0)<1$. Посторяя предыдущие выкладки, получим: $z(x)=0,\ x\in(x_{0..}x_0+x_1)$, а на промежутке $x_1..x_0+H$ $z(x)$ удовлетворяет уравнению $z(x)=\int_{x_1}^{x} f(\xi)(y_1(\xi)-y_2(\xi))d\xi$. Проведем указанные рассуждения еще раз.

Замечание. Леммы 1-4 представляют собой доказательство существования решения задачи Коши. Леммы 1-5 суть доказательства единственности задачи Коши.

Теорема Коши формулируется еще и так: если решение существует, то оно к тому же и единственно.

## Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе.

Теорема 2 Пусть правая часть уравнения $y'=f(x,y)$, $f(x,y)\in C$ и удовлетворяет условию Липшица в полосе $x\in(x_{0..}x_0+a),\ y\in R$. Тогда существует единственное на $x_{0..}x_0+a$ решение задачи (1).
Доказательство. Доказательство аналогично теореме 1, остановимся лишь на отличиях.

Теорема 1 доказывалась методом последовательных приближений: $\frac{dy_n}{dx}:=f(x, y_{n-1}(x))$, $y_n(x_0)=y^0$. Начальное условие: $y_0(x)=\forall\kappa(x)\in C(x\in(x_{0..}x_0+a))$. Так как $y_{01}\in C$, то $\exists L>0 : max|y_1(x)-y_0(x)|<L$. Поэтому $|y_2-y_1|\leq NL(x-x_0)$. Действуя по рекурсии, получим $mod\ y_n(x)-y_{n-1}(x)=L\frac{(Na)^N}{(N-1)!}$. Все остальные этапы доказательства теоремы

полностью совпадают с теоремой (1). (читай: леммами 1-4).

## Замечания, комментарии и примеры

Замечание 1. Можно доказать, что для существования решения задачи Коши в $D$ достаточно потребовать непрерывности (но не единственности!) $f(x,y)$ в $D$. Эта теорема известна как теорема Пеано. Повторяю: единственности может и не быть. Пример: $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{(y)};\, y(0)=0$ . $y_1(x)=0$ $y_2(x)=x^2$ . Это все из-за того, что условие Липшица не выполняется.

Замечание 2. В случае, если область $G$ является выпуклой по $y$ (любой отрезок $a..b$ ? параллельный OY соединяющий любые точки a и b целиком лежит в G), то достаточным условием Липшивости $f(x,y)$ является ограниченность производной $\frac{df(x,y)}{dy}$ это – следствие формулы конечный приращений Лагранжа.

Замечание 3. Решение задачи Коши может быть продолжено, например, вправо за точку $x_1=x_0+H$ , если $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (У1 и У2) в прямоугольнике $D1: |x-x_1|\le a_{1,}\, |y-y_1|\le b_{1,}$ , $y_1=y(x_1)$ . В этом случае решение существует на промежутке $x_0 \dots x_0+H+H_1$ . Продолжение возможно не всегда, даже если $f(x,y)$ бесконечно дифференцируема: $\frac{dy}{dx}=y^2$ , $y(1)=1$ . $y(x)=\frac{1}{x-2}$ . Решение «уходит» на бесконечность в точке 2, а после этой точке решения больше НЕ СУЩЕСТВУЕТ. То есть теорема о существовании и единственности локальная – она говорит, что интегральная кривая есть в некой окрестности (размер окрестности предоставляется).

Слабость теоремы о существовании подчеркивается в классе сингулярно-возмущенных задач $y'=\frac{1}{\mu}f(t,y), \mu\to 0$ . Из теоремы 1 следует, что $H\approx\mu$ Более эффективными в этих задачах являются теоремы сравнения. Одна из них получена в 20-х годах 20 века.

## *§3. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств.*

Рассмотрим задачу $y'=f(t,y)$ , $0\le t\le T$ . Внимание. Промежуток рассмотрения уже задан.

## Теорема о дифференциальных неравенствах.

Теорема 1 (Чеплыгина) о дифференциальных неравенствах.

Пусть существует решение $y(t)$ задачи 1 на промежутке 0..T

Пусть существует z: $\frac{dz}{dt}<f(l,z,t)$ ; $z(0)<z_0$ на промежутке 0..T

Тогда z(t) < y(t)

Доказательство. При $t=0$ неравенство выполняется, пусть также в точке $t=t_1$ - точка, где неравенство нарушается в первый раз. В этой точке $\frac{dz}{dt}\ge\frac{dy}{dt}=f(t_{1,}\, z(t_1))$ . Доказано.

Можно получить аналогичный результат относительно верхней функции.

## Теорема о существовании и единственности решения задачи 1

Определение. Функция $\alpha(t)$ называется нижним решением задачи 1, если она удовлетворяет неравенствам $\frac{d\alpha}{dt}< f(t)\alpha(t)<0\leq t\leq T$ , $\alpha(0)<y^0$ .

Определение. Функция $\beta(t)$ называется верхним решением задачи 1, если $\frac{d\beta}{dt}> f(t)\alpha(t)>0\leq t\leq T$ .

Теорема 2 (Чеплыгина) о существовании и единственности. Пусть $f(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица при $y\geq\alpha(t), y\leq\beta(t), 0\leq t\leq T$ , где $\alpha(t)<\beta(y)$ . Тогда существует решение задачи 1 $y(t)$ , причем $\alpha(t)<y(t)<\beta(t)$ .

Доказательство. Продолжим функцию $f(t,y)$ на полосу $t\in 0..\mathrm{T}, y\in R$ так, чтобы она удовлетворяла условию Липшица в нашей полосе: вместо (1) рассмотрим $\frac{dy}{dt}=h(t,y)$ , где

$$h(t,y)=\begin{matrix} f(t,\beta(t))+y\beta, y>\beta \\ f(t,y), y\geq\alpha(t), y\leq\beta(t) \\ f(t,\alpha(t))+y\alpha \end{matrix} .$$

очевидно, она удовлетворяет условию Липшица в нашей области. Поэтому решение задачи 2 существует и единственно. В силу того, что в начальный момент интегральная кривая находится между нижним и верхним решением, а в силу теоремы 1 чеплыгина не может пересечь нижнее или же верхнее решение, то решение задачи 2 остается между нижним и верхним решением, где $h=f$ , и, следовательно, решение задачи 2 является решением задачи 1.

Замечание. Теоремы 1 и 2 Чеплыгина применимы и в случае, когда $T=\infty$ . Это будет применяться в задачах теории устойчивости. Несложные рассуждения (см Васильева, Тихонов, Свешников) показывают, что в формулировках теорем Чеплыгина допустимы нестрогие знаки неравенств.

## Примеры

Рассмотрим задачу $\frac{dy}{dt}=-y^2$ , $y(0)=y^0>0$ . Исследуем разрешимость по теореме Чеплыгина. Из теоремы 1 §2 следует, что решение существует и единственно на промежутке $H=\frac{1}{4y_0}$ (см пример в конце §2). Выберем $\alpha(t)=0$ . Это – нижнее решение. В качестве верхнего решения возьмем $\beta(t)=d>y_0$ . Проверим диффиренциальное неравенсово: $\frac{d\beta}{dt}+\beta^2=d^2>0$ . Отсюда следует существования единсвенного решения нашей задачи такого, что $y(y)\in 0..\mathrm{d}$ . Видно, что $0\leq t<+\infty$ .

## Задача лектора.

Исследовать с помошью теорем Чеплыгина разрешимость задачи: $\frac{dy}{dt}=-y(y-\phi(t)); y(0)=y_0>0 ;\phi(t):>0 , \in C:0..\mathrm{T}$ . Установить существование положительного решения.

## §4 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра

Рассмотрим типичную задачу: $\frac{dy}{dx}=f(x,y), y(x_0)=y_0$ . Выберем параметр задачи: $y_0=\mu$ . Тогда решение суть зависимость $y(x,\mu)$ . Параметр, входящий в правую часть может, к примеру, оценивать точность в эксперименте. К примеру: $\mu$ меняется слабо: а решение?

В указанной задаче сделаем замену переменных: $z(x,\mu)=y-\mu$ . Приходим к задаче: $\frac{dz}{dx}=f(x,z+\mu); z(x_0)=0$ . Ниже пойдет речь о задаче

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y\mu); y(x_0)=0 \qquad (1)$$

Потребуем выполнения следующих условий:

(a1) пусть $f(x,y,\mu)\in C:D; D=|x-x_0\le a|;|y-y_0\le b|;|\mu-\mu_0|\le C$ и, следовательно, существует $M\ge max_D(|f(x,y,\mu)|)$ .

(a2) пусть $f(x,y,\mu)$ удовлетворяет в $D$ условию Липшица по переменной $y$ : $|f(x,y_{1,}\nu)-f(x,y_{2,}\mu)|\le N|y_1-y_2|$ , $N$ не зависит от $\mu$ .

Теорема 1. Пусть выполнены условия (a1) и (a2). Тогда на промежутке $x_0+H; H=min(a,\frac{b}{M})$ существует единственное решение задачи (1). непрерывное по $\mu$ .

Доказательство. Практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 из §2 и, поэтому, следует из равномерной сходимости функциональной последовательности $y_n(x,\mu)$ , получающейся как $y_n(x,\mu)=x_0+\int\limits_{x_o}^{x} f(\xi,y_{n-1}(\xi,\mu))d\xi$ . Видно, что решение непрерывно не только по $\mu$ , но я является непрерывной функцией переменных $(x,\mu)$ .

Замечание. Результат теоремы 1 легко обобщается на случай, когда $\mu=\vec{\mu}=(\mu_{1,}\mu_{2,}\mu_{3,}...)$ , то есть когда параметров несколько.

Теорема 2. Пусть $f(x,y,\mu)\in C$ и удовлетворяет (a2) в полосе $x_0..x_0+a, y\in R,|\mu-\mu_0|<C$ . Тогда задача 1 имеет единственное решение на отрезке $x_{0..}x_0+a$ , непрерывно зависящее от $\mu\in\mu-\mu_0..\mu+\mu_0$ .

## §5 Существование и единственность решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ

Рассмотрим системы вида $\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,y_{1,}..,y_m)$ , $i\in 1..\mathrm{m}$ , или же $\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{y})$ .

Начальные условия: $\vec{y}=\vec{y}_0$ .

Система (1) будет рассматриваться при тех же условиях:

(y1) пусть для $\vec{f}(t,\vec{y})\in C:D;D:|t-t_0|\le a,|y_i-y_i^0|\le b_i$

(y2) Условие Липшица для системы: $\forall i\ f_i(t,\vec{y})|f_i(t,\vec{y}_A)-f_i(t,\vec{y}_B)|N\le\sum\limits_i^m|y_A^i-y_B^i|$

Введем величину $H : min(a, \frac{min(b_i)}{M})$

Теорема 1 пусть выполнены условия (у1) и (у2). Тогда $\exists!$ на $t_{0..} t_0 + H$ решение системы (1).

Доказательство. Делается методом последовательных приближений так же, как и в §2, правда с небольшими осложнениями.

Теорема 2. Пусть функции $f_i(t, \vec{y}) \in C$ и выполняется (у2) в полосе $t_0 .. t_0 + a, y_i \in R$. Тогда решение задачи (1) существует и единственно на промежутке $t_0 .. t_0 + a$. Будет использоваться в главе «линейные системы уравнений»

Доказательство аналогично.

Теорема 3. Пусть функции $f_i(t, \vec{y}, \vec{\mu}) \in C$ и выполняется (у2) в той самой полосе при $|\mu_i - \mu_0| \leq c_i$. Тогда модифицированная задача (1) имеет единственное на $t_{0..} t_0 + a$ решение, непрерывно зависящая от параметров.

Будет использоваться в главе «краевые задачи» для обоснования «метода стрельбы».

Доказательство аналогично.

## *§6 Уравнения n-го порядка, разрешенный относительно старшей производной*

Рассмотрим еще одну задачу Коши:

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', ..) \quad , \quad y_0^{(i)} = y_{n-1}^0 \qquad (1)$$

Применим метод сведения задачи к нормальной системе ОДУ. Для этого $y^{(i)}(x) := y_{i+1}(x)$. Получим систему: $\frac{dy_i}{dx} = y_{i+1}(x)$ , $\frac{dy^{(n)}}{dx} = f(x, .., y^{(i)}, ..)$ с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i-1}^0$. Чтобы применить результат из предыдущего параграфа достаточно потребовать, чтобы условию Липшица удовлетворяла $f$. Тогда система будет удовлетворять условиям (§5 у12)

Теорема (мать её) 1. Пусть функция $f(x, y^{(i)}) \in C$ и удовлетворяет (§5 у2) в $D$. Тогда решение задачи (1) существует и единственно на $x_0 .. x_0 + H$ , $H$ определяется так же, как и в §5.

Теорема 2. Пусть $f(x, .., y^{(i)}, ..) \in C$ и удовлетворяет (§5 у2) в той самой полосе $x_{0..} x_0 + a, y^{(i)} \in R$. Тогда $\exists!$ на $x_{0..} x_0 + a$ решение задачи (1).

# Глава 3. Линейные ОДУ первого порядка.

В этой главе будут рассмотрены ОДУ вида

$$L=y^{(n)}(x)+\sum a_i(x)\,y^{(n-i)}=f(x) \qquad (1)$$

. Предполагается, что $a_i, f(x)\in C:X$ . Заметим, что $L$ - линейный оператор дифференцирования. Почему линейный – обращайтесь к Яголе. Действует он как $C^n(X)\to C(X)$ .

## §1. Общие свойства.

Выделим некоторые следствия линейности оператора $L$

Теорема 1: принцип суперпозиции. Пусть в уравнении (1) $f(x)=\sum_1^k c_i f_i(x)$ . Тогда $y(x)=\sum_1^k c_i y_i(x), y_i(x): L\,y_i=f_i$ является решением (1).

Доказательство :). Вычислим $L\,y=\sum L c_i y_i=\sum c_i L\,y_i=\sum c_i f_i=f$ . Доказано методом «берем и подставляем».

так сказать Теорема 2. линейная комбинация решений однородного уравнения (1) (то бишь $f(x)=0$ ) есть решение однородного уравнения.

Доказательство. Используй формулу $0+0=0$

Теорема 3. Разность двух решений неоднородного уравнения (одного и того же!) есть решение однородного уравнения.

Доказательство. Используй формулу $a-a=0$

Теорема 4.Если в уравнении (1) $f(x)=f_1(x)+i\,f_2(x)$ (да, комплексные числа), то решение уравнения (1) $z(x)=y_1(x)+i\,y_2(x)$ , где $y_i$ суть решения уравнений $L\,y_i(x)=f_i(x)$ .

Обратное тоже верно.

Доказательство. Используй формулу $z=a+ib$

Теорема 5 о существовании и Единственности. Решение задачи Коши для уравнения (1) существует и мать его единственно на $\forall\, a..b\in X$ .

Результат теоремы 5 есть следствие теоремы 3 § 6

## §2. Однородные Уравнения.

Легко показать, что множество решений линейного однородного уравнения образует линейное пространство. Поэтому возникает вопрос: каков базис этого пространства и какова размерность этого пространства?

### 1. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского.

Пусть есть система функций $y_k(x), k\in 1..\mathrm{N}$ .

**Определение**. Система функций $y_k(x)$ называется линейно зависимой, если

$$\exists c_k: \sum |c_i|\neq 0: \sum c_n y_n(x)=0\ \forall\, x \quad . \qquad (*)$$

**Определение**. Если (*) выполняется только для $c_i = 0$, то система функций называется линейно независимой.

**Определение**. Потребуем, чтобы $y_k(x)$ были *n-1* раз дифференцируемыми. Тогда

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & .. & y_n(x) \\ .. & .. & .. \\ y_1^{(n)}(x) & .. & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$ называется определителем Вронского.

## 2. Теорема о линейной зависимости системы функций.

<u>Теорема 6</u>. Пусть $y_k(x)$ - линейно зависимая система функций. Тогда определитель Вронского $w(x) = 0 \ \forall x$

<u>Доказательство</u>. Итак, $\exists c_k : \sum y_k c_k = 0$. Дифференцируем это счастье много раз: $\sum c_k y_k^{(l)} = 0 \ \forall l \in 0..(n-1)$. Мы получили линейную однородную систему уравнений около $c_i$ с определителем Вронского. Поскольку система имеет нетривиальное решение, то её определитель равен 0. Теорема доказана.

## 3. Теорема о линейной независимости решения однородного уравнения.

<u>Теорема 7</u>. Пусть $y_k(x)$ - линейно независимые решения однородного уравнения $Ly = 0$. Тогда $w(x) \neq 0 \ \forall x$

<u>Доказательство</u>. Докажем от противного. Предположим, что $\exists x_0 : w(x) = 0$. Составим систему линейных однородных уравнений относительно $c_i$ с определителем $w(x_0)$. Получим $\sum_{i=1}^{N} c_i y_i^{(l)} = 0 ; l \in 0..(N-1)$ В силу предположения, что $w(x_0) = 0$ получим что эта система имеет нетривиальное решение. То есть, существует нетривиальное $c_i^N y_i = 0$. Но из этого следует линейная зависимость функций $y_i$. Противоречие. Теорема доказана.

## 4. Теорема у существовании фундаментальной системы решений

Определение. Фундаментальной системой решений однородного уравнения $LY = 0$ называются любые $n$ (порядок уравнения) линейно независимых решений.
<u>Теорема 8</u>. Линейное однородное уравнение имеет фундаментальную систему решений.

<u>Доказательство</u>. Выберем произвольный не равный 0 определитель. $\Delta_0 = \begin{vmatrix} .. & .. & .. \\ .. & a_{ij} & .. \\ .. & .. & .. \end{vmatrix} \neq 0$.

Построим *n* решений задачи Коши: $L y_i = 0,\ y_i^{(j-1)}(x_0) = a_{j+1,\,i}$ Определитель Вронского $w = \Delta_0$, и, следовательно (теоремы 5, 6), получаем, что $y_i(x)$ линейно независима, то есть образует ФСР.
<u>Замечание</u>. ФСР бесконечно много.

## 5. Теорема о представлении общего решения через ФСР.

<u>Теорема 9</u>. Любое решение $z(x)$ уравнения $Ly = 0$. представимо в виде ЛК по ФСР: $\exists c_i : z(x) = \sum c_i y_i(x)$
<u>Доказательство</u>. Представим $z(x)$ как решение задачи Коши: $Lz = 0$ и $z^{(l)}(x_0) = z_0^l$. Представим $z(x) = \sum c_i y_i(x)$. Рассмотрим систему: $c_i y_i^{(l)} = z_0^l$ с определителем

$w(x_0)\neq 0$ . Отсюда следует, что система имеет единственное решение $c_i^0$ . Составим функцию $y(x)=\sum c_i^0\, y_i(x)$ . Заметим, что $y(x)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $z(x)$ . Следовательно, по теореме 5 о существовании и единственности, $z(x)=y(x)=\sum c_i y_i$ . Теорема доказана.

Замечание. Выражение $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ является общим решением линейного однородного уравнения $L y=0$

## *§3. Неоднородное уравнение.*

### 1. Общее решение неоднородного уравнения.

Пусть $\bar{y}(x)$ - частное решение неоднородного уравнения.
Теорема 10. Любое решение $z(x)$ уравнения $L y=f$ представимо в виде $z=y_{однор}^{общ}+\bar{y}$ то есть $z(x)=\sum c_i y_i(x)+\bar{y}(x)$ .
Доказательство. Разность $z(x)-\bar{y}(x)$ удовлетворяет однородному уравнению по одной хорошо известной теореме. Поэтому $z(x)-\bar{y}(x)=\sum c_i y_i(x)$ . Теорема доказана.

### 2. Функция Коши. Построение частного решения неоднородного уравнения.

Рассмотрим специальную задачу: $L y=0$ , $y^{(l)}(\xi)=0,\ l=0..(n-2);\ y^{(n-1)}(\xi)=1$ .

(Пример такой задачи. $y'-y=0,\ y(\xi)=1 \qquad y(x,\xi)=e^{(x-\xi)}$ )

Пусть $K(x,\xi)$ - решение нашей специальной задачи:
$L K(x,\xi)=0,\ K^l(\xi,\xi)=0,\ K^{(n-1)}(\xi,\xi)=1$

**Определение**. Функция $K(x,\xi)$ называется функцией Коши или же импульсной функцией уравнения $L y=0$ .

Оказывается, что функция Коши может быть эффективно использована для построения частного решения однородного уравнения.

Теорема 11. Функция $y(x)=\int_{x_o}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$ определяет решение следующей задачи Коши: $L y=f(x) \quad y^{(l)}(x_0)=0$ .

Доказательство. Убедимся в этом *прямым методом* (С «Физики Шутят»).

$y(x_0)=0$

$$y'(x)=K(x,x) f(x)+\int_{x_0}^{x} K_x(x,\xi) f(\xi) d\xi=..=0 \quad .$$

Все ясно. Честной подстановкой убеждаемся в истинности начальных условий.

$y^{(n)}(x)=K_x^{(n-1)}(x,x) f(x)+\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,\xi) f(\xi) d\xi=f(x)$ . Но это уже $n$ -я производная

Теперь помножим каждое из этих уравнений на коэффициенты $a_n(x)$ оператора $L$ b сложим и получим: $L y=f(x)+\int_{x_0}^{x} L_x(K(x,\xi) f(\xi)) d\xi=f(x)$ . Урра! Таки функция $y(x)$ суть решение нашей задачи.

## §4. *Уравнение с постоянными коэффициентами.*

Объект рассмотрения этого параграфа суть однородные уравнения с постоянными коэффициентами $a_i(x)=const$. Частное решение здесь ищется в специальном виде $y=e^{\lambda x}$. Подставим это «решение» в уравнение и получим $L\,y_ч=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^{n-i}=M(\lambda)$.

Этот многочлен называется характеристическим уравнением.

### 1. Структура ФСР в случае простых корней характеристического уравнения.

Уравнение $M(\lambda)=0$ имет ровно $n$ корней $\lambda_i$

Теорема 12. Пусть корни простые (однократные). Тогда ФСР имеет вид $y(x)=\exp(\lambda_i x)$

Доказательство.

1. $\exp(\lambda_i x)$ - корень. Очевидно. По определению.

2. Докажем, что $y_i(x)$ линейно независимы. Предположим противное. Пусть $\sum c_i y_i\neq 0,\ c_1\neq 0$. Поделим это выражение на $e^{\lambda x}$. Получим $\sum^{n-1} c_i\frac{y_i}{e^{\lambda_n x}}+c_n$.

Дифференцируем. Видишь? Последнего члена уже нет. Точно так же по очереди зарежем и все остальные. Останется $c_1\,e^{что-то\,неудобоваримое}=0$. А вот и противоречие.

### 2. Структура ФСР в случае наличия кратных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим случай, когда среди корней есть кратные корни. Выделим ситуацию, когда кратный корень только один. Остальные делаются по аналогии.

**(У)**. Пусть $\lambda_i, i\in 1..\mathrm{k}$ - простые корни. Пусть $\lambda_{k+i}=\bar{\lambda}, i\in 1..n-k$

Теорема 13 (счастливая). Пусть выполнено условие У. Тогда ФСР имеет вид $\exp(\lambda_i x), i\in 1..\mathrm{k}\,; x^N\exp(\bar{\lambda}), N\in 0..n-k-1$

Доказательство для корня кратности 2.

1. Докажем, что $x^N\exp(...)$ - решение. Подействуем на это счастье оператором $L$. $L\exp(...)=M(\lambda)\exp(\lambda x)$. Дифференцируем по $\lambda$. $L(x\exp(\lambda x))=M'(\lambda)\exp(\lambda x)+M(\lambda)x\exp(\lambda x)$. Пусть теперь $\bar{\lambda}$ - корень кратности 2. Значит, производная $M'(\bar{\lambda})=0$. Подставляем куда надо и получаем решение.

2. Докажем линейную независимость $y_i$. В случае двухкратного корня коэфициент $x\,c_n$ можно убить дифференцируя два раза.

# Глава 4. Системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений $\frac{dy_i}{dx}=F(x,y_{1,}..y_n)=\sum_j a_{ij}y_j(x)+f(x)$ (1?)

Можно рассматривать систему и в векторном виде: $\frac{d\vec{y}}{dx}-A(x)y=f$ (1!)

## *§1. Общие свойства.*

Так как операции дифференцирования и умножения на матрицу линейны, то оператор $L$ линеен. В силу линейности $L$ получим утверждения замечательных теорем (?????) 1-4. Это про то, что $2+2=2+2$

Задача Коши для уравнения 1.

$$\frac{d\vec{y}}{dx}-A(x)y=f\,;\vec{y}(x_0)=\vec{y}^0$$

Теорема 5. Пусть $x_0\in a..b\in X$ и $A(x),f(x)$ непрерывны на $X$ Тогда задача Коши имеет единственное решение на сегменте $a..b$

Доказательство. Результат теоремы 5 следует из того, что $F_i(x,..y_i..)$ удовлетворяет условиям Липшица в полосе (не надоело?) $x\in a..b\,,y_i\in R$ с постоянной Липшица $N=max_{i,j,x}a_{ij}(x)$ .

## *§2. Однородный уравнения*

### 1. Линейная зависимость системы вектор-функций. Определитель Вронсвкого.

Введем систему вектор-функций $\vec{y}_i$ . Линейная зависимость и независимость определяется (<зевает>) как обычно. Составим определитель Вронского: $W=(..\vec{y}_i(x)..)$ .

### 2. Теорема о линейной зависимости системы вектор-функций

Теорема 6. Пусть $\vec{y}_i(x)$ линейно зависима. Тогда определитель Вронского равен 0.

Доказательство я прослушал. Но оно наверное такое-же.

### 3. Теорема о линейной независимости решений однородного уравнения.

Теорема 7. Пусть $\vec{y}_i(x)$ - решения однородного уравнения $l\,y=0$ и эта система линейно независима. Тогда определитель Вронского не равен 0 для любого $x\in a..b$ .

### Теорема о существовании ФСР.

**Определение**. ФСР уравнения 1 называется любой линейно независимый набор из $n$ решений.

**Определение**. Матрица $W(x)$ , составленная из решений, образующих ФСР, называется фундаментальной матрицей уравнения (системы) 1.

Факт. Очевидно, что $W(x)$ - фундаментальная матрица – является решением матричного уравнения $\frac{dW}{dx}=A(x)W(x)$ , причем $\exists x_0 \in a..b: |W(x_0)| \neq 0$

Теорема 8 о существовании ФСР. сабж.

Доказательство. Докажи сам. По аналогии.

Определение. Решение уравнения $d\frac{\Phi}{dx}=A(x)\Phi, A(x_0)=E$ обозначают как $\Phi$

Теорема 9. Любое решение $z(x)$ уравнения $L\vec{y}=0$ представимо в виде $z(x)=W(x)C$ , где $W$ фундаментальная матрица, $C$ - постоянный вектор.

Доказательство. Решение будем рассматривать $z(x)$ как решение задачи Коши: $\vec{z}(x_0)=\vec{z}_0$ . Покажем, что можно выбрать такое C, что $z(x)=W(x)C$ . Выберем $C=W^{-1}(x_0)z_0$ . Подставим, получим.

Замечание. Выражение $y(x)=W(x)C$ является общим решением нашего однородного уравнения.

## § 3. неоднородные уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения. $L\vec{y}=\vec{f}(x)$ .

Пусть $\vec{y}^v$ - частное решение.

Теорема 10. Любое решение $z(x)$ представимо уравнения представимо в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Доказательство лень.