# Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

*Анатолий Григорьевич Ягола.*
http://foroff.phys.msu.ru/intur
http://afrodita.phys.msu.ru

## Список литературы.

1. Васильева, Тихонов. «Интегральные уравнения». Физматлит 2002.
2. Эльсгольц. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление». УРСС 2000.
3. Васильева, Медведев, Тихонова, Уразгильдина. «Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление». ФИЗМАТЛИТ 2003.

# Глава 1. Интегральные уравнения.

## *§1. Введение.*

Определение. Интегральное уравнение – это уравнение, где неизвестная функция входит под знак интеграла.

Мы будем заниматься одномерными линейными интегральными уравнениями следующего вида:

1. Уравнения Фредгольма 2 рода: $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)dS+f(x)$ , $x\in[a,b]$ .

   Видно, что неизвестная функция – под интегралом. Предполагается её непрерывность. Функция $k(x,s)$ называется *ядром* интегрального уравнения. Предполагается её непрерывность по совокупности аргументов $\overset{¿}{чбы¿¿}$ . Функция $f(x)$ неоднородности уравнения уравнения. Непрерывна. Если $f(x)=0$ , то уравнение называется *однородным*. Если не оговорено специально, все функции предполагаются вещественными. $\lambda$ - вещественное число, *параметр интегрального уравнения*.
2. Уравнение Фредгольма 1 рода. $\int_a^b k(x,s)y(s)ds=f(x)$ , $x\in[a,b]$ .Здесь $y(s)$ - неизвестная, $k(x,s)$ - ядро, $f(x)$ - неоднородность.
3. Уравнение Вальтерра 2 рода $y(x)=\lambda\int_a^x k(x,s)y(s)ds+f(x), x\in[a,b]$ . Смысл всех функций такой же, только вот верхний предел интеграла переменный. $k(x,s)$ - ядро – определено в треугольной области $\Delta=\{(x,s): a\le s\le x\le b\}$ . Уравнение Вальтерра суть частный случай Фредгольма, так как если доопределить ядро на $[a,b]x[a,b]/\Delta$ как $k(x,s)=0$ , то получим уравнение Фредгольма.
4. Уравнение Вальтерра первого рода $\int_a^x k(x,s)y(s)ds=f(x); x,s,\in[a,b]$ .

Пример. $f(x)=1/\sqrt{(2\pi)}\int_{-inf}^{+inf} e^{ixs}y(s)ds$ .

Еще пример – преобразование Фурье.

Пример решения . $\int_0^x y(s)ds=f(x); x,s\in[0,1]$ Это уравнение Вальтерра. Пусть решение –

непрерывная функция. Нас будут интересовать вопросы корректности постановки задачи:

1. Существование решения. Очевидно. $y(x)=f'(x)$ . Итак, решение существует для всех $f: f(0)=0$
2. Единственность. Понятно, что решение (если есть), то единственно.
3. Устойчивость решения. Решение устойчиво, если малым изменениям $f(x)$ соответствуют малые изменения $y(x)$ .

## *§2. Метрические, нормированные и Евклидовы пространства. Элементы теории линейных операторов.*

Определение. Вещественным Линейным Пространством (далее - ЛП) называется такое множество $L$ , что

1. $\forall x, y \in L \exists x+y \in L$
2. $\forall \alpha \forall x \in L \exists \alpha x \in L$
3. $$\begin{gathered} \forall x \forall y \forall z \forall \alpha \\ x+y=y+x \\ (x+y)+z=x+(y+z) \\ \exists 0 \in L: x+0=x \\ \exists(-x)\in l: x+(-x)=0 \\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \\ (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x) \end{gathered}$$

Элементы ЛП называют векторами. ЛП называют часто векторным.

Определение. Элементы $x_n$ называются *линейно независимыми*, если для любой линейной комбинации $\sum \alpha_n x_n=0$ только в том случае, если $\forall n: \alpha_n=0$ .

Определение. Если максимальное число ЛНЗ векторов конечно, то пространство называется *конечномерным*, иначе – *бесконечномерным*. Максимальное число ЛНЗ элементов называется *размерностю*.

Пример. $R^n$ - пространство вектор-столбцов высоты $n$ .

Пример. $y(x):\{y(x)\in C; x\in[a,b]\}$ . Бесконечномерно.

Определение. Множество $M$ называется метрическим пространством, если $\forall x, y \in M \exists \rho(x, y)$ . Оно ( $\rho(x,y)$ ) называется *расстоянием*, причем оно обладает свойствами:

$$\begin{gathered} \rho(x, y)\geq 0 \\ \rho(x, y)=0 \ \textit{в том и только том случае, когда}\ x=y \\ \rho(x,y)=\rho(y,x) \\ \rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z) \end{gathered}$$

Определение. Последовательность элементов $x_n \in M$ *сходится* к $x \in M$ , если $\lim \rho(x_n, x)=0$ .

Сделать дома. Дать определение открытого и замкнутого множества.

Определение. Линейное пространство $N$ называется нормированным, если $\forall x \in N \exists \|x\|$ , причем

$$\begin{gathered} \|x\|>0; \|x\|=0\ TTT\ x=0 \\ \alpha\|x\|=\|\alpha x\| \\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \end{gathered} .$$

Нормированное пространство становится метрическим, если определить $\rho(x,y)=\|x-y\|$

Определение. $x_n$ сходится к $x$ , если $\lim \|x_n - x\|=0$ .

Сделать дома. Определить открытое и замкнутое множество.

Лемма. Если $\lim x_n=x_0$ , то $\lim \|x_n\|=\|x_0\|$

Доказательство. Докажем, что $\forall x, y \in N \, |\|x\|-\|y\||<\|x-y\|$ .

$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|$ . Значит $\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$ . Аналогично обратно. Ну, а отсюда уж если $\lim \|x_n\|-\|x\|=0$ , то уж определение верно точно.

В линейной алгебре норма определялась как $\|x\|=\sqrt{(\sum x_n^2)}$ .
Верно, что если $\lim X^n=X^0$ , то $\lim X_k^n=X_0^k$ ()

Примерами пространств являются $R^n$ , $C([a,b])$ - пространство функций $y(x)$ , непрерывных на $[a,b]$ . Если правильно ввести умножение, то пространство будет линейным. $\|y\|_{C([a,b])}=max(|y(x)|), x\in[a,b]$ . Все требования выполнены. Равенство 0, линейность, неравенство треугольника. Сходимость по этой норме называется равномерной сходимостью. Хорошо известны следующие результаты.

1. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.
2. Из непрерывности функций последовательность следует непрерывность предела.
3. Критерий Коши.
   Определение. Фундаментальной последовательностью называется такая $x_n$ нормированного пространства, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N\ \forall p\in N \|x_n+p-x_n\|<\varepsilon$ .
   Критерий Коши. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.
   Обратное, вообще говоря, неверно; Это выполняется только для полных пространств.

Определение. Пространство называется *полным* (Балаховым) если любая фундаментальная последовательность этого пространства сходится. Иногда полное пространство называют Балаховым, если оно к тому же бесконечномерно.
Пример полного пространства: вещественные числа, $R^n$ , $C([a,b])$ . Пример неполного – рациональные числа.
Определение. *Функциональным пространством* $c^P[a,b]$ называется состоящее из функций, непрерывных со всеми производными до $p$ -го порядка. Введем норму:
$\|y\|=\sum_0^p max(|y^{(k)}(x)|); x\in[a,b]$ . Все свойства выполняются (докажи сам). Сходимость по такой норме называется сходимостью со всеми производными до *p*-го порядка включительно.
Факт. Пространство $C^P([a,b])$ Банахово, как и $C([a,b])$

Определение. Линейное пространство $E$ называется Евклидовым, если
$\forall x,y\in E\ \exists\rho=(x,y)\in R: \forall x,y,z,\alpha$

$$(x,y)=(y,x)$$
$$((x+y),z)=(x,z)+(y,z)$$
$$((\alpha x),y)=\alpha(x,y)$$
$$(x,x)\ge 0.(x,x)=0\ TTT\ x=0$$

Если уж есть скалярное произведение, то можно ввести норму, порожденную скалярным произведением: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ . Для доказательства того, что это – норма, потребуется неравенство Коши-Буняковского: $|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$ .
Пример Евклидова пространства: $R^n$ .
Напоминание. В $R^n$ умножаются вектор-столбцы. Скалярное произведение столбцов $X$ и $Y$ там - $\sum_1^N x_i y_i$ .

Введем в пространстве $C([a,b])$ скалярное произведение: $(y_1, y_2)=\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx$ .

Норма, порождаемая этим произведением: $\|y\|=\sqrt{\int_a^b y^2\,dx}$ . Пространство непрерывных функций с такой нормой будем называть $H([a,b])$. К сожалению, $H[a,b]$ - неполное.

Итак, на одном и том же пространстве введены уже две нормы. Одна для сходимости равномерной (получается Банахово пространство), другая – для сходимости в среднем (получается Евклидово пространство). Из равномерной сходимости , как известно, следует сходимость в среднем.

Докажем неполноту $H(a,b)$ Тогда на $[a,b]$ выберем кусочно-непрерывную функцию $f(x)$. Легко построить последовательность $f_n(x)$, таких, что $\int_a^b f(x)^2\,dx=F(x)$. легко, однако выбрать таких функции, чтобы $F(x)$ ,была бы разрывной, то есть, не принадлежала бы нашему пространству. То есть, $H[a,b]$ неполно.

<u>Определение.</u> Разумеется можно дополнить пространство $h[a,b]$. Полное Евклидово бесконечномерное пространство называется *Гильбертовым*.

Если мы пополним $H[a,b]$, то получим пространство $L_2[a,b]$, но чтобы описать это пространство нужно знать интегралы Лебега. Поэтому мы их не изучаем.

Определение. Пусть линейный оператор А действует из n1 в $N_2$ Нормой $A$ называют $\|A\|=sup\,A(fi),\,fi: fi\in N_1\,\|fi\|=1$

Оператор называется ограниченным, если его норма меньше, чем бесконечность.

Выполняется неравенство $\|AY\|\le\|A\|\|Y\|$

<u>Теорема.</u> Линейный оператор $A: N_1\to N_2$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство.

Известно, что непрерывность на всем пространстве эквивалентно непрерывности в точке нуль.

Докажем, что из ограниченности следует непрерывность. Выберем $y_n\to 0$ и докажем, что $z_n=A(y_n)\to 0$. Это и будет означать, что мы доказали непрерывность в точке 0.

$\|z_n\|=norm\,A(y_n)\le norm\,A\,norm\,y_n\to 0$

Докажем, что из непрерывности следует ограниченность. Предположим противное. Пусть оператор $A$, но $\forall L\exists y_n\in n_{1,}\ norm\,y_n=1: norm\,A(y_n)\ge L$. Тогда $norm\,A(y_n)\ge 1$, то есть $norm(A(\frac{y_n}{n}))\ge 1$. Но тогда (так как $\frac{y_n}{n}\to 0$), то оператор не непрерывен.

Доказано.

Для нас очень важен оператор Фредгольма $A_{фр}(y)=\int_a^b K(x,s)y(s)ds$. Покажем, что оператор Фредгольма при действии в $H[a,b]$ ограничен. Для этого возьмем любую $y\in H[a,b]:\|y\|=1$. обозначим как $z(x)=A_{фр}(y(x))$. Видно, что $|z(x)|^2=|A(y)|^2=|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds|^2$. Этот интеграл при каждом фиксированном х можно рассматривать как произведение функции K(s). Применим неравенство Коши-Буняковского:

$|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds|\le\int_a^b K^2(x,s)\,ds\int_a^b y^2(s)\,ds=\int_a^b K^2(x,s)\,ds$. Получим

$mod\ z(x)^2\le\int_a^b K^2(x,s)ds$. Интегрируем по х. $norm\,z^2=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\,dx\,ds$. Но K – непрерывная функция, поэтому наш двойной интеграл меньше, чем бесконечность, значит все значения A меньше бесконечности. Ну, а значит, A ограничен. Остается три случая (в других пространствах), но там наш оператор тоже ограничен.

**Лемма** Пусть $A: N_1 \to N_2$, $B: N_2 \to N_3$, и оба они ограничены. Тогда для $BA: N_1 \to N_3$ верно: $\|BA\| \le \|A\| \|B\|$.

Доказательство. Возьмем $y \in N_1 : norm\, y = 1$ Тогда $norm\, BA(y) \le norm(B)\, norm(Ay) \le norm(B)\, norm(A)\, norm(y) \le norm(B)\, norm(A)$. Если в левой части взять максимум по всем y, то получим искомое равенство. Доказано.

**Определение**. Последовательность $y_n$ называется ограниченной, если $\exists C : norm\, y_n \le C\, \forall\, n$.

**Лемма.** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Лемма**. Фундаментальная последовательность ограничена.

**Определение**. Последовательность $y_n$ называется компактной, если из любой подпоследовательности этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Факт**. Компактная подпоследовательность является ограниченной.

Доказательство: если последовательность неограничена, то это означает, что из неё можно выделить подпоследовательность $y_{nk} : \|y_{nk}\| \ge k$. Но сходящаяся последовательность как минимум не сходится, какую бы подпоследовательность из неё не выделяй. Доказано.

**Критерий компактности**. Пусть $a_n$ - последовательность вещественных чисел.

*Теорема Больцано-Вейерштрасса*. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Итак, критерий компактности в $R_1$ это ограниченность.

*Критерий компактности в* $R_n$ - также ограниченность.

В бесконечномерном пространстве $H[a,b]$ компактность выглядит сложнее. В нем можно построить счетный ортонормированный базис (например, Фурье-функции с небольшим наворотом) $E_n : (E_i, E_j) = \delta_{ij}$ ( $\delta_{ij}$ - символ Кронеккера).

Ясно, что $E_n$ ограничена, но она не является компактной: $norm(E_i - E_j) = \sqrt{(E_i - E_j, E_i - E_j)} = \sqrt{(E_i^2 - 2\ E_i E_j + E_j^2)} = \sqrt{2}$. То есть любая подпоследовательность не будет даже фундаментальной, а значит, сходится не будет уж точно.

В пространстве $C[a,b]$ получается то же самое.

**Самое Важное Определение**. Линейный оператор $A\, N_1\, N_2$ называется вполне непрерывным, если $\forall\, y_n \in N_1 : \|y_n\| < C$ последовательность $z_n = A(y_n)$ компактна. Итак: любая ограниченная последовательность переводится в компактную.

**Теорема**. Вполне непрерывный оператор ограничен, а значит и непрерывным.

**Доказательство**. Предположим противное. Тогда $\exists\, y_n : \|y_n\| = 1,\ \|A(y_n)\| \ge n$. Тогда последовательность $A(y_n)$ должна быть компактной. А она даже и не ограничена. Противоречие. Доказано.

Не каждый ограниченный оператор вполне непрерывен. Введем еденичный оператор в $H[a,b]$ $I : I(y) = y$. Его норма $\|I\| = 1$. Но он не вполне непрерывен, так как переводит ограниченную $E_n$ в некомпактную $E_n$.

**Самая Главная Теорема**. Пусть $A = A_{фр} : H[a,b] \to H[a,b] = \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$. Тогда А – вполне непрерывный оператор.

**Доказательство (тоде самое главное).**

Сначала докажем, что $A$ вполне непрерывен при действии из $H[a,b]$ в $C[a,b]$. Критерий компактности $z_n(x)$ в пространстве следующий (теорема Арцела): Если последовательность $z_n(x)$ непрерывных на $[a,b]$ функций равномерно ограниченна и равностепенно непрерывна, то из такой последовательности выделяется равномерно сходящаяся подпоследовательность.

Напомним, что равномерная сходимость – сходимость по норме $C[a,b]$. Равномерная

ограниченность – ограниченность по норме $C[a,b]$ .
Возьмем произвольную ограниченную функцию $y_n \in H[a,b]$ . подействуем:

$z_n(x)=\int_a^b K(x,s)\,y_n(s)\,ds$ . Надо доказать, что функция равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Сначала докажем равномерную ограниченность. Обозначим $k_0 = sup\,K(x,s): x, s\in[a,b]$ Очевидно, $k_0<\infty$ . Дальше

$$mod\ z_n(x) \le mod \int_a^b K(s,x)\,y_n(s)\,ds \le \sqrt{mod\int_a^b K^2(s,x)\,ds}\sqrt{\int_a^b y^2(s)\,ds} \le M\ K_0\sqrt{(b-a)}$$

$norm\, z_n \le M\ K_0\sqrt{(b-a)}$ . Равномерная ограниченность доказана.
Теперь докажем равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$ . Возьмем две любые точки $x_{1,}\ x_2$ / $mod\ z_n(x1) - mod\ z_n(x2) = mod \int (K(x1,s) - K(x2,s))\,y_n(s)\,ds \le \ldots$

$$\ldots \le \sqrt{\int_a^b (K(x_{1,}s) - K(x_{2,}s))^2\,ds}\sqrt{\int_a^b y(s)\,ds}$$

Функция K(x,s), непрерывная по совокупности аргументов, является равномерно непрерывной на этом множестве, то есть

$$\forall\, e>0\ \exists d: \forall\, x_{12}: mod\, x_1 - x_2 < d\ mod\ K(x_{1,}s) - K(x_{2,}s) < \frac{e}{M\sqrt{b-a}}$$

Поэтому, $\forall\, e>0\ \exists d>0\ mod\,(z_n(x1) - z_n(x2)) \le e\ \forall\, n\,\forall\, x_{12}: mod\,(x1-x2) \le d$ . Так вот, если $\delta$ не зависит не только от $X$ , но и от $n$ то непрерывность называется равностепенной. Итак, было доказано, что $z_n(x)$ компактна в $C[a,b]$ .
Теперь докажем, что оператор вполне непрерывен и при действии $H[a,b] \to H[a,b]$ . Так как из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то из равномерной сходимости $z_n(x)$ следует сходимость её в среднем, а значит – оператор непрерывен при действии $H[a,b] \to H[a,b]$ . Теорема доказана.