

Физика конденсированного состояния вещества.

Литература.

Миронов. Конденсированное состояние вещества.

Введение.

Законы излучения, поглощения и т.д. не могут быть адекватно описаны классической теорией света. Необходимо ввести **квантовую гипотезу**: свет проявляет свойства частиц. Примером «неувязки» является фотоэффект. Процессы распространения света, однако, хорошо описываются волновыми свойствами света. Итак: свет проявляет и волновые, и корпускулярные свойства.

Наоборот, микрочастицы (электроны) обладают волновыми свойствами. Де Бройль ввел соотношение между длиной волны частицы и её импульсом. Частицу нельзя рассматривать только как волновой пакет – он бы расплывался из-за разной групповой скорости компонент пакета. Поэтому необходимо использовать оба представления для описания частиц: и волновое, и корпускулярное.

Неопределенность Гейзенберга.

Если частице соответствует волна: то можно говорить только о длине волны в некоторой области пространства и частоте в промежутке времени, но не в точном местоположении частицы в пространстве и времени. Волновые числа, необходимые для описания пакета занимают такой интервал времени, чтобы $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$. Здесь k – волновое число. Связь импульса с волной Де-Бройля: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, поэтому $\Delta x \Delta p \geq 2\pi \hbar$ -- это и есть соотношение Гейзенберга.

Задание начальной координаты и начального момента времени полностью описывает поведение частицы в дальнейшем. Так было в классической механике. Но в квантовой механике не так, есть полученная неопределенность: невозможно точно определить начальные параметры (координату и импульс) частицы. Ясно, что если формально устремить \hbar к 0, то неопределенность уйдет. Таковая операция возвращает нас к классическому представлению.

Волновая функция и Уравнение Шредингера

Легко показать, что указанные неточности ничтожно малы в применении к макрообъектам. Совсем не так для электрона, движущегося в атоме: $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$

$\Delta v \approx 10^7$ м/с, поэтому $\Delta p \approx 10^{-23}$, а значит $\Delta x \approx 10^{-10}$ м - а это и есть радиус атома водорода! Итак, невозможно сказать, в какой точке атома водорода находится электрон. Для характеристики движения частицы в микромире вводят функцию: **волновую функцию частицы** $\Psi(x, t)$ - величину, характеризующую состояние частицы:

$\Psi(x, t) \Psi^{\text{сопряж}}(x, t) = \phi(x)$, где $\phi(x)$ - плотность вероятности обнаружения данной частицы. Саму же волновую функцию наблюдать никак нельзя. Волновая функция удовлетворяет тем не менее некоему уравнению – **уравнению Шредингера**:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = -\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Это только одномерный случай. В трехмерном

$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ заменяется на $\Delta \Psi$.

Будем искать решения в виде $\psi(x) \exp(i\omega t)$. Подставим.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x) \exp(i\omega t)}{\partial x^2} + V(x) (\psi(x) \exp(i\omega t)) = -\hbar \frac{\partial \psi(x) \exp(i\omega t)}{\partial t}$$

видишь ли ты закон сохранения энергии? Первый член – кинетическая, второй – потенциальная.

Получим решения для свободной частицы. $V(x)=0$. Останется: $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \hbar \omega \psi(x)$.

Итак, свободной частице можно поставить в соответствие

$\Psi(x, t) = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(Et - x \sqrt{2mE})\right)$. Это уравнение бегущей волны. Итак, волновой функцией свободной частицей является бегущая волна. Тогда её энергия выражается как $E = \hbar \omega$, $k = 2 \pi \frac{p}{\hbar}$, то и получается соотношение Де-Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Такая частица (волна?) может свободно распространяться в пространстве.

Из уравнения Шредингера следует и квантование энергии. Рассмотрим несвободную частицу. Она заперта в ящике с бесконечными стенками. $V = \infty, x < 0, x > L$, иначе $V = 0$. Вообще говоря, решение будет выглядеть так же - $\psi_0 e^{ikx}$. Но в $x = 0$ $\sin(x) = 0$, а $\cos(x) \neq 0$. Вне ящика волновая функция равна 0 (там частицы не бывает) А вот косинус в точке 0 – единица. Поэтому никаких косинусов в конечном ответе нет. Но в $x = L$ $\psi(l) = \sin(kl) = 0$. А тогда $\psi(l) = \sin\left(\pi \frac{n}{L} l\right)$. Ну а тогда энергия равна $E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$. Квантуется!!! Любое ограничение движения частицы в пространстве заставляет изменяться энергию дискретно.

Заметим, кстати, что энергия частицы всегда больше потенциальной энергии, это связано с тем, что частица не останавливается, а всегда летает.

Это был одномерный случай. Рассмотрим не одномерный и запишем уравнение Шредингера: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{d^2 \psi}{dz^2} + V(x, y, z) \psi = E \psi$. Пусть $\psi = 0$ во всех точках, не лежащих в кубе $[0..L] \times [0..L] \times [0..L]$. Будем искать решение в виде

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \psi_y(y) \psi_z(z) . \text{ Подставим. } -\frac{\hbar^2}{2m} \sum \frac{1}{\psi_i} \frac{d^2 \psi_i}{di^2} + V(x, y, z) \psi = E \psi \text{ Но}$$

Каждая из этих величин может зависеть только по своей переменной. А в сумме они дают константу. Значит, все они константы (k_i). Значит полное значение ВФ:

$$\Psi = \psi_0 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) . \text{ Значения } k_i = n_i \frac{\pi}{l} . \text{ Тогда } E = \hbar^2 \pi^2 \frac{\sum n_i^2}{2mL^2} . \text{ Задача}$$

стала трехмерной, но для каждого измерения есть свое квантовое число k_i и волновая функция задается тремя числами. Этот набор характеризует состояние системы, физически отличающееся от других состояний. Разные наборы n_i могут приводить к равным энергиям, но физические состояния все равно будут разными. Такие случаи (повторения энергий) называются вырожденными, а их число – степень вырождения.

Известно, что в механике есть точное решение только для двух взаимодействующих тел. В квантах можно «решить» только атом водорода (2 тела) – получить уравнение Шредингера. Но «решить» остальные атомы нельзя. Но можно сделать кучу допущений: предположить, что все взаимодействуют только с ядром, а на остальные взаимодействия забыть.

Итак, атом водорода. $V(r) = \frac{e^2}{r}$ -- потенциальная энергия. Перейдем в сферические координаты. Решить это можно, но мы не будем. Мы ответ напишем. Энергия, разумеется, квантуется. Уровни энергии оказываются равными $E_n = \frac{-r}{n^2}$, $r = \frac{me^4}{2 \hbar^2}$. Величина

энергии зависит только от главного кв. числа. $E_1 = 13.5 \text{ ЭВ}$ - энергия активации основного состояния. Расстояние между соседними уровнями по мере увеличения n уменьшается.

$a_0 = \frac{h^2}{me^2} \approx 10 \text{ нМ}$ - первый радиус Бора. Физический смысл первого радиуса Бора -

вероятность найти атом в нем все еще существенна. Кроме n есть еще числа: l и m_l - связаны с радиальным и азимутальным (может, наоборот) углами соответственно.

$l = 0..n-1$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. При заданных (n, l) есть $2l+1$ чисел m_l . Для данного n есть n^2 различных комбинаций (l, m_l) . И так, степень вырождения состояния с данным n равна n^2 . Есть еще одно квантовое число: спин. Для каждого набора (n, l, m_l) их два:

$\pm 1/2$. И так, степень вырождения еще больше: $2n^2$.

До сих пор мы считали, что числа n, l, m_l проявления трехмерности задачи. На деле же они имеют физический смысл и связаны с механическим моментом импульса электрона в данном состоянии. $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. $L^2 = l(l+1)\hbar^2$. $L_{OZ} = m_l \hbar$. где OZ - ЛЮБАЯ наперед заданная ось. То есть квантуется и модуль, и проекция. $|L| = \sqrt{l(l+1)\hbar}$, а $\max L_{OZ} = m_l \hbar < |L|$. То есть, проекция НА ЛЮБУЮ ось меньше модуля. Это значит, что сам вектор не является сохраняющейся величиной. И так, сохраняются модуль момента и его проекция на ОДНУ ось. Такой момент импульса называется орбитальным.

Есть еще один момент импульса: электрон обладает им сам по себе. Этот момент тоже

квантуется (а как же?) Проекция S_z на ось (любую, но наперед заданную) равна $\frac{\pm 1}{2}$.

Называется она (S) спином.

С точки зрения классической механики казалось бы системе выгоднее находится в состоянии с наименьшим значением энергии. Почему бы электронам не попадать на ядро? Потому что Принцип Паули: В состоянии с данным набором квантовых чисел может находиться только один электрон.

В больших атомах тем не менее наблюдается центральная симметрия, и потенциал будет

$\frac{1}{r^2}$, поэтому можно будет ввести те же квантовые числа, но энергия теперь будет зависеть

еще и от орбитального числа l . $l=0$ суть s состояние. Далее p, d и f состояния.

Вспоминай химию.

В атоме водорода силовое взаимодействие центрально-симметрично. Перейдем в сферические координаты. Получим, что энергия состояния пропорциональна $\frac{-1}{n^2}$ и

зависит только от одного квантового числа. Но есть же еще два числа - «полярное» и «азимутальное», с ними связано квантование модуля момента электрона, а с другим - проекция этого момента на любую ось. Можно получить степень вырождения $2n^2$

Что же делать, если атом не такой простой? Кажется простым посадить все электроны на наинизшие уровни, но мешает принцип Паули (частица не может совпадать по квантовым числам с другой). Т.е., если уровень занят, то занимай следующий уровень.

Если атом многоэлектронный, то получается задача трех (и более) тел. Можно, правда, забыть на взаимодействия между электронами и использовать те же квантовые числа. Энергия, правда, начнет зависеть и от l тоже: чем больше l , тем больше энергия. Посмотрим, как будут заполняться оболочки? 1s(2), 2s(2), 2p(6), 3s(2), 3p(6), 4s(2), 3d(10), 4p, 5s, 3d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6f ...

Если какая-то из оболочек полностью заполнена, то элемент неактивен. Суть химических реакций в том, что атому обмениваются электронами на высоких уровнях в целях понижения общей энергии системы.

Кристаллическая решетка и Волновая Функция

Начнем приближать атомы и сделаем из них кристаллическую решетку. Взаимодействие между атомами существенно модифицирует спектр энергетических уровней: уровни начнут расщепляться на полосы с почти непрерывным спектром.

Пусть было N атомов с уровнем n и вырождением g_n . Степень вырождения до сближения равна $N g_n$. После сближения уровни начнут двигаться и расщепляться. В самом деле, пусть был набор (1,2,1) и (2,1,1). Раньше эти наборы обладали одной энергией. Направим силу по ОХ, и энергии станут разными. Так и работает расщепление.

Итак, получаются полосы энергии. В среднем энергия электронов начинает понижаться: низкая энергия внутренних оболочек не изменяется, а так как состояние устойчиво (энергетически выгодно), то энергия понижается. На особо малых расстояниях атому возникает отталкивающая сила, поэтому полная энергия $E(\vec{r})$ обладает минимумом.

Теорема. Кристаллические тела обладают трансляционной симметрией.

Одним из наиболее важных свойств твердых тел является трансляционная симметрия. Оно позволяет построить теорию электронных уровней твердого тела, так как позволяет найти основное состояние.

Трансляционная симметрия означает следующее: Существуют три базисных вектора \vec{a}_{123} таких, что любая ЛК $\vec{p} = \sum n_i \vec{a}_i$ переводит решетку саму в себя.

Важным свойством является то, что электроны принципиально неразличимы.

Поэтому вероятность нахождения электрона в некоей точке \vec{r} $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \sum n_i \vec{a}_i)$. Тогда $\Psi(\vec{r} + \vec{p}) = C(\vec{p}) \Psi(\vec{r})$, причем $|C(\vec{p})| = 1$ - фазовый множитель. Осуществим сдвиг в два этапа: $n_1 = n_1' + n_1''$. Получим соответственно

$\Psi(\vec{r} + n_1 \vec{a}_1) = C(n_1 \vec{a}_1) \Psi(\vec{r}) = C(n_1' \vec{a}_1) C(n_1'' \vec{a}_1) \Psi(\vec{r})$. То есть, имеет место «линейность по умножению»: $C((k+p)\vec{a}) = C(k\vec{a}) C(p\vec{a})$. Логарифмируем:

$\ln C((k+p)\vec{a}) = \ln C(k\vec{a}) + \ln C(p\vec{a})$. Итак: логарифмы фазового множителя складываются также, как и вектора. Поэтому $\ln C(n_1 \vec{a}) = \lambda n_1 \vec{a}$. Учитывая условие нормировки $|C| = 1$, $C(n, \vec{a}) = \exp(i n_1 \vec{k} \vec{a})$, где \vec{k} - некий вектор. Итак,

Теорема Блоха. Для кристаллической решетки верно $\Psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{k}\vec{a}} \Psi(\vec{r})$, если только $\vec{a} = \sum n_i \vec{a}_i$.

Рассмотрим $U(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$. Тогда получится $\Psi(\vec{r}) = U(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$. НО! $\Psi(\vec{r})$ НЕ ЗАВИСИТ ОТ t . Сдвинем это счастье на \vec{a} .

$$U(\vec{r} + \vec{a}) = \exp(-i\vec{k}(\vec{r} + \vec{a})) \Psi(\vec{r} + \vec{a}) = \exp(i\vec{k}\vec{a}) \exp(-i(\vec{r} + \vec{a})\vec{k}) \Psi(\vec{r} + \vec{a}) = \dots = U(\vec{r})$$

Итак, Волновая функция электрона в кристалле – бегущая волна, промодулированная в кристалле некоей функцией, периодической относительно узлов решетки.

Величина \vec{k} получила название волнового числа, а $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ - импульс частицы. Какой? Той, которая соответствует волне. Только тут \vec{p} называют квазиимпульсом, а волновое число – квазиволновым числом. Чем же они отличаются от обычных?

Рассмотрим направление в кристалле \vec{n}_j . Пусть период структуры a_j , а длина кристалла - l_j . Предполагается, что в направлении j кристалл «транслируется» на длину кристалла l_j . Так достигают бесконечности. Волновые функции, однако, в трансляциях должны быть равны (это же одна и та же волновая функция :), то есть $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \vec{l}_j) = i$

$$U(R) e^{ikl} = U(R + l_j n_j) \exp(ik(r + l_j n_j))$$

Но U – периодическая. Поэтому

$$\exp(ikl_j n_j) = 1, \text{ то есть } (kn) = 2 \frac{\pi}{l_j} n, n \in Z$$

Внимание! Волновой вектор квантуется!

В отличие от импульса волновой частицы, квазиимпульс и квазичастица оказываются квантованными.

Каждому состоянию в кристалле отвечает $\vec{k}_j = 2 \frac{\pi}{a_j} \vec{n}_j = b_j$ - вектор обратной

решетки. Рассмотрим трансляцию на период обратной решетки. Посмотрим, что останется от волновой функции при трансляции на b_j

$\Psi_{b_j}(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = U(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) e^{i b_j (r + a_j)} = U(r) e^{i b_j r} e^{i b_j a_j} = \dots = \Psi_{b_j}(\vec{r})$. Итак, при хитрых значениях вектора k не только U , но и само Ψ периодическое.

Пусть есть две волновых функции, и их вектора отличаются на вектор обратной решетки: $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{g}_j$. По теореме Блоха $\Psi_k(\vec{r} + a_j \vec{n}_j) = e^{i(\vec{g}_j + \vec{k}') \cdot \vec{r} + i \vec{g}_j \cdot a_j} \Psi_{k'}(\vec{r})$. Упрощаем, подставляем, получаем, что вектора k и k' описывают одну и ту же волновую функцию, а значит отвечают одному и тому же физическому состоянию.

Итак, волновое число дискретно около $2 \frac{\pi}{l}$ и состояния, сдвинутые на $2 \frac{\pi}{a}$ одни и те же. Итак, абсолютно все волновые состояния системы могут быть помещены в «кубике» $-2 \frac{\pi}{a} \dots 0$. Этот интервал называется первой зоной Бриллюэна. Вектор $2 \frac{\pi}{a} \vec{i}$ называют вектором обратной решетки. Кстати, а сколько их, этих состояний? Их ровным счетом $\frac{l}{a}$, то есть число атомов в кристалле. Все правильно, количество состояний измениться было не должно. И не изменилось.

Можно выделить еще и 2-ю, 3-ю и т.п. Зоны Бриллюэна.

Кстати, электрон в кристалле движется и взаимодействует с решеткой.

Предположим, что сила взаимодействия с каждым атомом очень мала. Но атомов-то много? Поэтому при выполнении условия $k_{n_j} = \frac{\pm \pi}{a_j} n$ от каждого атома отражается чуть-чуть волны, но складываются они в фазе, поэтому рано или поздно волна отразится от кристалла. Итак: когда период \vec{k} приближается к зоне Бриллюэна, кристалл тормозит волну. Появляются запрещенные зоны энергии.

Лекция от 10 мар 2006

Рассмотрим, чем же определяется динамика движения электрона в кристалле.

Рассмотрим уравнение Гамильтона $v = \frac{dr}{dt} = \frac{dH}{d\vec{p}}$ и $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dH}{dR}$ $H = E(p) + V(r)$ -

сумма энергий. Подставим: $v = \frac{dE}{dp}$, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dR} = \vec{F}$.

Но у нас же кристалл! Поэтому вместо импульса появляется квазиимпульс, а вместо силы – только внешняя сила (кроме периодического потенциала решетки). Предположим, что на электрон действует только электрическое поле. Тогда за время t

$\delta E = e E v \delta t = \frac{dE}{dp} \delta p = v \delta p$. Еще раз: $\delta p = e E \delta t$, или же $\frac{\delta p}{\delta v} = e E$: изменение

квазиимпульса зависит только от внешней силы. Тем не менее механическое ускорение зависит от суммы всех сил: $\frac{dv}{dt} = \sum F_{all}$, но $\frac{dp}{dt} = \sum F_{внеш}$. Поэтому зависимость

скорости от импульса неочевидна (и уж никак не $p=mv$). Выразим $\frac{dv}{dt} = \sum F_{all}$ через

внешние силы. $(\frac{dv}{dt})_j = \frac{d}{dt} (\frac{dE}{dp})_j = \sum_1^3 d^2 \frac{E}{dp_i dp_j} \frac{dp_i}{dt} = \sum_1^3 d^2 \frac{E}{dp_i dp_j} \sum F_{внеш}$.

Итак, если $m_{ij} = (d^2 \frac{E}{dp_i dp_j})^{-1}$, то $\sum_1^3 m_{ij} \frac{dv_j}{dt} = F_{внеш}$. То, электрон тоже можно рассматривать как свободный, но вот масса его нетривиальна.

Как же наша масса учитывает взаимодействие с решеткой?

Пусть есть свободный электрон. Для него верен закон $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ / Поместим

электрон в периодический потенциал. Это приведет к тому, что вся область разойдется на зоны. И все ветви нашей «параболы» мы можем перетащить в первую зону Бриллюэна. То, зависимость энергии электрона в зависимости от импульса многозначна. Но на границе зоны

$$v = \frac{dE}{dp} = 0, \text{ что приводит к «искривлению» краев функции } E(p) = \frac{p^2}{2m}.$$

В результате того, что электрон взаимодействует со всей решеткой, появляется запрещенная зона электрона: мы же «распрямляли» -- вот оттуда. Движение электрона поэтому можно рассматривать как частицу малой массы и малого заряда, или же как частицу малой массы и отрицательном зарядом.

Пусть каждый атом дает свободный электрон. Как будут заполняться состояния? В каждом состоянии может находится два электрона.

Рассмотрим квадратную решетку. (p_x, p_y) . первая зона суть квадрат $(-\pi \frac{\hbar}{a}, \pi \frac{\hbar}{a}) \dots (-\pi \frac{\hbar}{a}, \pi \frac{\hbar}{a})$ Вторая зона будет представлять тот же квадрат, только

повернутый под углом: по диагонали-то ТОЖЕ должна быть повторяемость! Посмотрим на зависимость $E(p)$. С одной стороны кусок ветки «загнется к краю», но с другой стороны – нет (вторая зона, диагональ).

Будем рисовать изоэнергетическую поверхность (поверхность Ферми): в одномерном случае это точка (энергия Ферми). В начале это будет окружность, но при приближении к границе сверху, снизу, справа и слева вырастут «уши» - в «диагональном направлении» энергия меньше. Наконец, поверхность ферми (здесь это кривая, если кто не понял) станет «вырезанными квадратами».

СТОП! Мы забыли про «более верхние» зоны (транспонированные куски параболы)! Они тоже могли начать уже давно заполняться! Такие вещества называются полуметаллами.

Электрон в магнитном поле

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле (и в кристалле). На электрон в

магнитном поле действует сила Лоренца $\frac{dp}{dt} = \frac{l}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]$. Умножим её на скорость

электрона: $(v, \frac{dp}{dt}) = 0$. Но $v = \frac{dE}{dp}$. Итак, $\frac{dE}{dt} = 0$, то есть энергия со временем не

меняется. Ух ты, блин. Теперь умножим на H $(\frac{dp}{dt})_{||} = 0$: компонента, направленная вдоль поля не изменяется.

Так как $E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = const$, и $p_z = const$, то $p_x^2 + p_y^2 = const$, то есть в пространстве (p_x, p_y) это окружность.

Рассмотрим $\frac{dp}{dt} = \frac{l}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]$. Получим: $\frac{dv}{dt} = \frac{l}{c} [v_N \times H]$, а значит $|p_N| = \frac{lH}{c} |r_N|$

. Итак, электрон в магнитном поле движется по циклоиде. Период её равен $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Теперь вернемся к кристаллу. При движении электрона в решетке он будет двигаться по циклоиде с той же частотой, только вот величина m будет циклотронной массой

$$m_H = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{dE}.$$

Внимание! E Тут – энергия ферми, а не напряженность!. S связана с формой поверхности Ферми: это экстремальное сечение поверхности Ферми из тех, кто перпендикулярен магнитному полю. Частоту ω можно измерить.

Введем понятие плотности состояний. Пусть $N(E)$ - число состояний, энергия которых меньше, чем E . Тогда $\nu(E) = \frac{dN(E)}{dE}$ - число состояний. Для трехмерного пространства: плотность состояний есть корень из энергии - $\nu(E) \sim \sqrt{E}$. Для двумерного случая это константа. Для одномерного случая $dN_p = \frac{2L}{2\pi\hbar} dp = L \frac{dp}{\pi\hbar}$. Но

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}, p = \sqrt{2m\varepsilon}, \text{ значит } dp = \dots = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} d\varepsilon. \text{ Итак: } \nu(E) = \frac{L}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{E}$$

Движение можно разбить на движение вдоль магнитного поля (магнитное поле на него не влияет) и перпендикулярно МП. В перпендикулярном поле электрон совершает финитные движения: электрон чем-то ограничивается. Значит... его энергия квантуется? Да!. Разложим энергию: $E_{\Pi} = E_N + E_t = (n + 1/2 \hbar\omega) + (\frac{p_z^2}{2m})$. $\omega = \frac{eH}{mc}$ - циклотронная частота. Получается, что да, энергия системы в перпендикулярном движении квантуется. Поэтому разрешены только некоторые орбиты $m = \sqrt{(\frac{2\hbar c}{eH}(n + 1/2))}$.

Заметим, что графики $E(p_z)$ представляют собой семейство парабол. Их называют параболой Ландау.

Движение в перпендикулярном поле квантовано, поэтому система оказывается одномерной. Поэтому каждую параболу Ландау можно воспринимать как одномерное движение. Поэтому плотность состояния энергий будет пропорциональна $E^{-1/2}$. Поэтому при пересечении уровня Ферми параболы Ландау будет образовываться деление на 0.

Электрон во внешнем электрическом поле.

Пусть электрон болтается в кристалле, в зоне Бриллюэна. Пусть задача одномерна. Сначала скорость электрона ($v = \frac{dE}{pd}$) в точке минимальной энергии скорость максимальна, а потом решетка начинает тормозить электрон, и на следующей границы Зоны Бриллюэна скорость становится равной 0 и (!) электрон полетит обратно. Итак: в кристалле при приложении постоянного электрического поля электрон начинает колебаться. Но тогда он

должен излучать на той же частоте, на которой колеблется. $\tau = \int_{-\pi\frac{\hbar}{a}}^{\pi\frac{\hbar}{a}} \frac{dp}{eE} = 2\pi \frac{\hbar}{eE}$.

Амплитуда колебаний: $x = \frac{\Delta E}{eR}$. В металлах $x \sim 10^6$ см, $\nu \sim 10^{11.2}$ Гц. Это правда бессмысленный результат, так как длина пробега электрона суть несколько десятков нанометров.

ТО, происходит разбиение энергетического спектра на энергетические зоны. Имеет место зависимость $E(k)$. Все это исходило из предположения о СЛАБОМ взаимодействии электрона и вещества. Вопрос: А если нет? Ответ: а по фиг, ничего не изменится. Предположим теперь обратное: волновая функция электрона – почти функция атома. Так вот: все равно можно найти функцию, удовлетворяющую условию Блоха:

$$\Psi(k, r) = \sum_L e^{(ikl)} \Psi_A(r, l). \text{ Более того появится зависимость энергии от } k, \text{ и вид графика}$$

будет таким же. При объединении атомов в кристалл появляются энергетические зоны, связанные уже не со свободными электронами, а с орбиталями атомов. Возникают полосы энергии, квазивектор, квазиимпульс и все остальное. Такой подход называют методом

сильной связи.

Связи в атомах

Есть два типа связи: ковалентная (Есв около нескольких ЭВ) и ионная. У последней электронное облако смещено в сторону одного из атомов. Пример – NaCl. Натрий отдает один атом хлору. Характерная энергия связи – несколько ЭВ. Есть смешанная, ионно-ковалентная связь. Электрон переходит «не полностью». Можно говорить о степени ионности той или иной связи.

Бывает также металлическая связь (метод почти свободных электронов). Можно считать, что ионные остовы атомов помещаются в облако электронов. Электроны свободны. Характерная энергия связи – несколько ЭВ.

Ван-Дер-Ваальсова связь. Проявляется в том случае, если Атом суть образование с положительном ядром и электроном облаком. Во внешнем поле эта штука становится диполем. Диполи начинают взаимодействовать. Характерная величина – сотни мЭВ.

До сих пор рассматривались свойства электронов идеальной кристаллической решетки. Но всегда есть тепловое движение, атомы будут смещаться из положения равновесия, а значит, будет нарушаться трансляционная симметрия. Как же быть: Вся наша теория летит на фиг! Кстати, ведь атом остановить невозможно: неопределенность Гейзенберга не позволит! Увы, это не совсем так. На самом деле вполне можно рассматривать идеальную решетку как нулевое приближение, а эффекты, связанные с теплотой – как поправки.

К слову о абсолютном нуле. Как уже было сказано, невозможно остановить атомы, всегда будут нулевые колебания. Так вот: у гелия они больше межатомного расстояния поэтому гелий никогда не кристаллизуется.

Атомы в решетке колеблются в решетке регулярно, учитывая взаимное расположение.

Пусть есть n атомов, находящихся друг от друга на расстоянии a . Замкнем цепочку в круг длиной ma . Пусть ξ_n - смещение атома из положения равновесия. Пусть атомы еще и пружинками $k = \beta$ соединены. Тогда на n -й атом действует $f_n = \beta(\xi_{n+1} - \xi_n) - \beta(\xi_{n-1} - \xi_n)$. Тогда $m \xi'' = \beta(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$. Ищем решение в виде $\xi = \xi \exp(i(\omega t + nka))$. Тогда уравнение движение преобразуется в

$$-w^2 m \xi \exp(\dots) = \beta \xi \exp(\dots) (e^{ika} + e^{-ika} - 2). \text{ Получим } \omega = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right) \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}. \text{ Итак, все}$$

атомы колеблются с одинаковой частотой, и она связана с k – волновым числом.

Максимальная частота равна $2 \sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)}$ - частота колебания отдельного атома силой

$f = 2f_0$. Если же $w \ll w_0$, то для малых волновых чисел $w \sim k$. Это характерно для скорости звука. То есть для длинноволновых колебаний на всю дискретность среды можно забыть. Зависимость от k при малых k линейна, потом график «замедляется» и выходит на полочку $w_{max} = 2 \sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)}$.

Все различные значения волновых чисел лежат в интервале $0.. \frac{\pi}{a}$. Все ли значения

к допустимы или же k квантуется? Оказывается, что квантуется. $k = 2 \frac{\pi}{na} Q, Q \in Z$.

Решетка из двух типов атомов.

Рассмотрим частный случай кристаллической решетки: силы между атомами – пружинки жесткость β , в четных узлах стоят буквы M - в нечетных - m , Решим задачу о движении электрона. Получим ДВА решения для одного атома:

$$\omega^{plus} = \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)}, \quad \omega^{minus} = \pm ka \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}.$$

Ветвь «-» - обычные акустические колебания, в фазе со звуковой частотой.

Для ветви колебаний + соседние атомы колеблются в противофазе; можно считать, что две решетки – большая и маленькая – колеблются в фазе, но в противофазе друг с другом. Более того, два соседних атома, с большой и малой массой, центр масс атома не колеблется. В случае «+» может образоваться дипольный момент соседних атомов. С ним могут взаимодействовать фотоны, поэтому такие колебания, в пику звуковым, названы оптическими. Между акустическими и оптическими колебаниями, разумеется, есть запрещенная щель. Если устремлять $M \rightarrow m$, щель схлопнется.

Итак, при добавлении второго типа атомов появляется второй, принципиально новый тип колебаний.

ФОНОНЫ

В случае квантово-механического рассмотрения частица, имеющая определенную энергию, связанную с её волновой функцией и импульсом, называют фононом. Фонон – квант колебаний решетки. Процесс образования волн можно рассматривать как процесс образования целого числа фононов.

В случае ненулевой температуры можно считать, что в решетке есть некоторое число фононов, которые и являются отклонениями решетки от идеального состояния.

Решением уравнения Шредингера для энергии гармонического осциллятора:

$$e_n = (n + 1/2) \hbar \omega. \text{ Какова же средняя энергия кванта с частотой } \omega? \text{ Осциллятор}$$

находится в состоянии de_n : $p = D e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}$. Усредняем:

$$e_n^{CP} = h \frac{\omega}{2} + (-h\omega) \frac{d}{dW} \ln(1 + e^{-W} + e^{-2W}) = h \frac{\omega}{kT} - h\omega \frac{d}{dW} \ln 1/1 - e^{-W} = h\omega/2 + h \frac{\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}.$$

Итак, энергия состоит из двух частей: $h \frac{\omega}{kT}$ - энергия нулевых колебаний: молекулы не

могут остановиться. Примем именно его за ноль. Тогда $h \frac{\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$ - энергия тепловых колебаний.

Если $h\omega \gg kT$, то e и n малы. Наоборот, если температура велика, то $e_n \approx kT$. Наоборот, при большой температуре легко посчитать и теплоемкость решетки: $c_v = nk = 3k N_a$, где n – число нормальных мод, а N_a – число атомов. Это – закон Дюлонга и Пти.

Для расчета мод колебаний низких температур была предложена следующая модель: пусть все

частоты равны, и выберем $\omega_{эк}$, а число степеней свободы - n . Тогда $E = h \frac{\omega_{эк}}{e^{\frac{h\omega_{эк}}{kT}} - 1} n$.

При стремлении к бесконечности получаем закон Пти. При малых значениях $h \frac{\omega_s}{kT}$ получается

$$c_v(t) = kN \left(h \frac{\omega}{kT} \right)^2 e^{-\frac{h\omega}{kT}}. \text{ Экспериментальная зависимость не сходится: } c \sim T^3, \text{ но не}$$

экспоненте! Более разумную модель предложил Дебай.

Запишем в общем виде энергию кристаллической решетки.

$$E = \sum_{k, p} h \frac{\omega_i(k)}{\exp(h \frac{\omega_i}{kT}) - 1} \quad \text{. Чем}$$

суммировать, лучше проинтегрируем по всей зоне Бриллюэна. Но хона Бриллюэна квадратная, поэтому интегрируют по сфере кого-то там, по объему равной первой зоне. Результат получается тот же.

Различные классы материалов.

Полупроводники

Если судить по количеству грантов РФФИ, работы по полупроводникам составляют примерно 20% всех грантов. Это связано с тем, что вся современная электроника так или иначе основана на использовании полупроводниковых материалов. Развитие физики полупроводников и послужило толчком к развитию электроники. Тем не менее, физика полупроводников – сравнительно молодая наука: вплоть до 30-х годов 20 века считалось, что полупроводники вещь бессмысленная: глючная и невоспроизводимая. Только после работ Бриджина(?), который придумал метод очистки материалов, наука стала активно развиваться. Особенно развитию электроники помогло начало войны, но все шло медленно до середины 50-х годов, пока не был изобретен транзистор. Очередной прорыв был в середине 70-х годов: новая технология роста элементов – метод молекулярно-пучковой эпитаксии (?). Помог получать очень тонкие слои материалов.

Технологии, связанные с получением некоторых неорганических классов полупроводников развиты очень хорошо. Проблема в том, что эти технологии стоят много килобаксов. Прелесть же органических полупроводников в том, что их очень просто получить. Есть некая мечта: намазать краситель на какую-то крышу, то мы получим солнечную батарею.

Чем же определяется проводимость полупроводниковых материалов? Существует наука «квантовая статистика», говорящая, что частицы с полуцелым спином подчиняются распределению Ферми-Дирака

$$f(e) = \frac{1}{\exp(\frac{e-\xi}{kT}) + 1} \quad \text{- вероятность заселения данного уровня энергии } e \quad \text{. При}$$

стремлении температуры к 0 $T \rightarrow 1$ $f(e)=0, e > \xi$
 $f(e)=1, e < \xi$. Величина ξ - величина, ВЫШЕ
 которой все пусто, а НИЖЕ – все заполнено. ξ похода на энергию Ферми, для металлов это оно и есть.

Для полупроводника не совсем ясно положение ξ : да, оно в запрещенной зоне, но где?? Пусть E_B - валентная зона, тогда число частиц валентной зоны суть

$$n = \int_0^{E_B} v_N(e) de \quad \text{, и это же число ВСЕХ электронов. Если } T \neq 0 \quad \text{, то}$$

$$n = \int_0^{E_B} f(e) n_i(e) de + \int_{E_{II}}^{\infty} f(e) v_{II}(e) de \quad \text{. Пользуем эти две формулы, получаем результат:}$$

$$\int_{ВАЛ} (1-f(e)) v(e) de = \int_{ПРОВ} f(e) v(e) de \quad \text{. Мы получили «странный» факт: число электронов}$$

равно числу дырок :). Перепишем формулу: $1 - f(e) = \frac{1}{\exp\left(\frac{-e - \xi}{kT}\right) + 1}$ - вероятность

нахождения дырок. Энергия как бы направлена вниз. Теперь дырочные уровни отсчитываются в ВАЛЕНТНОЙ зоне, причем вниз. Тогда уровень ферми лежит в метте

$E_B + \xi = E_{II} - \xi$. Концентрация дырок равна $p = \int_0^{inf} f(e_p + \xi_p) \nu(e_p) de$. Для электронов формула аналогична. Пусть величина $\xi \gg kT$ Тогда смело пренебрегаем единицей:

$f(\xi) = e^{\frac{e - \xi}{kT}}$ - распределение Больцмана. Подставляем и интеграл. Плотность состояний получается $\nu(e) = \frac{1}{2\pi} 2 \frac{m_e^{3/2}}{h^2} e^{1/2}$. Подставляем: $n = \dots = 2 \left(\frac{m_e kT}{2\pi h^2}\right) e^{\frac{\xi_e}{kT}}$. Для дырок

получим $p = \dots = 2 \left(\frac{m_p kT}{2\pi h^2}\right) e^{\frac{\xi_p}{kT}}$. Но $p = n$! Перемножаем:

$$n = p = \sqrt{np} = 2 \left(\frac{kT}{2\pi h^2}\right)^{3/2} (m_e m_p)^{3/4} e^{\frac{-E_{запр}}{2kT}}. \text{ Было использовано то, что } \xi_e + \xi_p = E_{запр}.$$

Итак, концентрация электронов и дырок связана с температурой (параметр) и $E_{запр}$ (параметр). Как же управлять этим параметром?

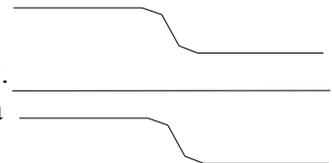
Полупроводники бывают чистыми, а могут иметь и примеси. Рассмотрим фосфор в кремнии. Кремний – четырехвалентное соединение. Когда атом фосфорам вставляем вместо кремния, один электрон оказывается «лишним». То есть, ниже дна зоны проводимости появляется еще один энергетический уровень. Состояние локализовано, с квазиимпульсом не связано, но энергия-то есть! И низкая. Такого типа примеси называют донорными. Они образуют лишние электроны, с которых электрон проще забрать электрон в зону проводимости.

Если же вкрячить в кремний немного алюминия, то электронов станет нехватать: из валентной зоны на это место кидается электрон, а вместо него появляется дырка. Тоже проводник.

Итак, если примесей нет, то ξ располагается строго посередине: $\xi = \frac{E_B + E_{II}}{2}$, при наличии примесей все сложнее.

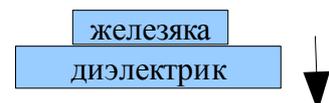
Диод.

Именно расположение ξ является инвариантом и сохраняется при приведении двух полупроводников в контакт. Если уровень ферми не изменится, и энергетические уровни искривляются. Ясно, что число электронов, преодолевающее барьер невелико. Ну да ладно, приложим напряжение. Тогда уровни разъедутся на величину eU , то есть барьер становится все ниже и ниже. Наоборот, если приложить напряжение не в ту сторону, то барьер увеличится и ничего никуда не потечет. Ураа! Мы изобрели полупроводник!!! Самый настоящий дыод!



Полевой транзистор

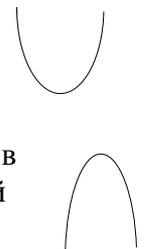
Изобретем еще что-нибудь: например, полевой транзистор. Возьмем полупроводник, на котором есть два электрода, между



которыми – слой диэлектрика. Сверху есть металлический затвор. Если приложить перпендикулярное напряжение, «отгоняющее» электроны от железяки, то ток упадет.

Лазер

Оказывается полупроводники могут быть использованы для разработки оптических приборов. Если мы создали пустое место в валентной зоне и есть электрон в зоне проводимости, то электрон может рекомбинировать. А значит излучить квант света (кажется, мы собираемся изобрести лазер). Но так можно не в любом полупроводнике. Если непрямозонные полупроводники, где потолок одной зоны и пол другой находятся в разных точках по квазиимпульсу. Тогда квант



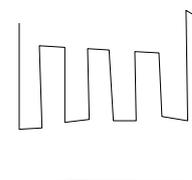
уносит с собой и импульс $\hbar k$. Но квант света может унести только $k = 2 \frac{\pi}{\lambda}$, и это ОЧЕНЬ мало. Поэтому в непрямозонных полупроводниках рекомбинация практически невозможна.

Создать лишние электроны и дырки очень просто: на границе раздела они возникают сами собой, давай только напряжение. Осталось сделать резонатор и мы получим лазер.

Начиная с 70-х годов, когда стала возможно создавать структуры очень тонкие, появилась куча идей, как бы это могло бы работать: понижение размерности структур приводит к новым свойствам. Приведем пример.

Конструирование запрещенной зоны

Если часть атомов Галлия заменить на атомы алюминия, то в среднем раствор GaAs + AlAs суть полупроводник, и ширина его зоны зависит от концентрации алюминия. Постоянные кристаллической решетки у AsGa и AlGa равны, поэтому их можно наносить по очереди, молекулярными слоями. При последовательном напылении мы получим весьма экстравагантную картину энергоуровней. Движение внутри решетки будет состоять из двух типов: движение по оси роста и обычное. Причем первое из них – ограничено значит квантуется! Поэтому характерное расстояние между зонами начинает зависеть от параметров слоя. Поэтому мы можем «сконструировать» полупроводник с любой толщиной зоны проводимости. Еще раз: *можно построить материал с любой наперед заданной зоной проводимости*. А значит, мы можем получить не только красный диод, но и синий. А также зеленый и желтенький. Определенная польза народному хозяйству.



Квантовый эффект Холла

С середины 19 века известен обычный эффект Холла: есть проводник размерами $d \times d \times L$. Если мы пропустим электрический ток и подадим магнитное поле, то последнее отклонит электроны к одной из граней. Получится

ток вправо, H вверх

поле Холла: $E_y = RH$; $R = U_H / I H$. Но $F_L = \frac{e}{c} v_x H$, её-то и уравновешивает поле Холла.

Поэтому получим $E_y = v_x \frac{H}{c}$, а значит $R = \frac{1}{n e c}$. Итак, поле холла прямо

пропорционально магнитному полю. Ну, в общем, линейная зависимость $R(H)$ станет содержать «полочки». Они объясняются тем, что движение электронов полностью

квантовано. Величина такой полочки выражается как $\frac{1}{q} \pi \frac{\hbar}{e^2}$. Уместно говорить о кванте сопротивления, когда q – число уровней – равно 1.

Физика магнитных веществ.

При высоких температурах все вещества суть либо диа-, либо парамагнетики. Если вещество поместить в магнитное поле, то магнитные линии перераспределяются, так как каждый элемент объема вещества суть маленький магнетик. Поэтому полный момент тела есть

$$\vec{M} = \vec{m} V \quad . \quad m \quad \text{есть плотность магнитного момента, причем} \quad \vec{M} = \chi \vec{H} \quad . \quad \text{У}$$

Парамагнетиков $\chi > 0$. У диамагнетиков $\chi < 0$. Обычно $|\chi_{ПАР}| > |\chi_{ДИА}|$. $\chi_{ПАР} \sim \frac{1}{T}$.

Более точно (при низких температурах): $\chi_{ПАР} \approx \frac{c}{T - \theta}$. $\chi_{ДИА} \sim const(T)$. Иногда используют не χ , а $\mu = 1 + 4\pi\chi$. Известно, что $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, поэтому $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Говорят об идеальной диамагнетике. В них магнитное поле равно нулю. Такими веществами являются сверхпроводники. Магнитная проницаемость его - $-\frac{1}{4\pi}$.

Тела, состоящие из атомов, не обладающих собственным магнитным моментом суть диамагнетики. Обладающие – парамагнетики.

Поскольку электроны движутся в поле центрально-симметричного потенциала, поэтому (в классике) момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const$. Но мы-то помним, что сохраняется только модуль и проекция на заданную ось): $mod L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, $L_z = \hbar m_l$.

Теперь разберемся с тем, что атом суть диполь, посчитаем поле этой диполи: $E = \dots = 2q \frac{d}{r^3}$

. q – заряд, d – размер диполи. Убывает как куб, а не как квадрат. Есть поле. В нем летают электроны (течет ток). Что получается? Магнитное поле. Посчитаем и его. $dH = j \frac{\Delta l}{cr^2}$

Интегрируем. $H = j \frac{2\pi r^2}{cr^3} = w j \frac{S}{cr^3}$. Тоже убывает как куб. Величину $w j \frac{S}{c}$ называют

магнитным моментом кругового тока. Магнитное поле суть $H(r) = \frac{3(M_l n)n - M_l}{r^3}$.

Найдем связь между магнитным и механическим моментом. $j = \frac{q}{2\pi R} v$.

$$M_l = \frac{qvr}{2c} \quad . \quad M_{мех} = m_q v r \quad . \quad \text{поэтому} \quad \frac{M_{mag}}{M_{мех}} = \frac{q}{2mc} = n \frac{e}{2mc} = \dots = \frac{q_e}{2m_e c}$$

Теперь рассмотрим электрон как ток. Механический момент квантуется? Значит, и магнитный квантоваться будет. Поэтому $M_z = \frac{e\hbar}{2m_e c} m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ Величина

$$\frac{e\hbar}{2m_e c} \quad - \quad \text{элементарный магнитный момент} \quad - \quad \text{названа магнетоном Бора.}$$

Во внешнем магнитном поле энергия диполя выражается как $-\vec{M} \vec{h} = -M_z \hbar$

Пусть теперь магнитное поле зависит от z : $H = H(z)$ Тогда энергия начнет зависеть от координаты. Значит, появится сила $F = M_z \frac{dH}{dz}$. Квантуется кстати... и число значений

вроде нечетно ($0, \pm 1, \dots$)... Так вот: их число четное. И есть тому экспериментальное подтверждение. В этом случае можно смело положить $l = 1/2, 3/2, \dots$ то все встанет на свои места. Это все из-за того, что кроме кругового момента у электрона есть и свой момент импульса (а также магнитный момент суть спин), и его надо учитывать.

Кстати о спине: $S p = \hbar \sqrt{s(s+1)}$, $S p_z = \hbar s$. Тут s – квантовое число. Описывается спин теми же числами, только вот гиромагнитное отношение (отношение мех и магн момента) у него в два раза больше.

Для удобства обозначим $g = \frac{e}{2mc}$. Так вот, для орбитального движения величина $g = 1$, для спинового $g = 2$.

Величина собственного магнитного момента магнитона оказывается равна магнитону Бора $\frac{e \hbar}{2 m_e c}$. Но каков магнитный момент всей системы? Просто складывать их нельзя. Складываются они настолько трудно, что мы этого так и не узнаем. Величины спинового и орбитального движения складываются по определенным правилам. Правила четкие и работают, вот и все, что нам надо знать.

Полный механический момент $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$. Можно выписать формулу полного механического момента $g = 1 + \{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)\} / \{2J(J+1)\}$.

Парамагнетики

Тела, обладающие собственным магнитным моментом – парамагнетики. Магнитные моменты представляют «хаотический газ» магнитных стрелок. Включаем магнитное поле, стрелки упорядочиваются, поле усиливается. Температура разупорядочивает это стастье. Посчитаем что-нибудь.

$N(m_j) \sim \exp\left(\frac{-E_M}{kT}\right)$ – вероятность.

$\sum N(m) = N$ – нормировка.

$\frac{N(m_j)}{N} = \frac{\exp\left(\frac{\mu g H}{kT} m_j\right)}{\sum \exp\left(\frac{\mu g H}{kT} m_j\right)}$ Большая формула. Давайте устремим в ней $T \rightarrow 0$.

Окажется, что заселены нижние состояния энергии. Поле упорядочено. А странно. Наоборот, устремив температуру к бесконечности получим равную заселенность. Опять удивительно.

Энергия такого газа суть $-N \mu g H \frac{\sum_{-j}^j m_j \exp\left(\frac{\mu g H}{kT} m_j\right)}{\sum \exp\left(\frac{\mu g H}{kT} m_j\right)}$. Можно получить также величину

M – полный момент. Если $M H \ll kT$, то разлагаем наше счастье в ряд.

$M \approx N g M \sum_{-j}^j m_j \frac{\left(1 + \frac{\mu g H}{kT}\right)}{2 J + 1}$. При суммировании получим 0. Надо еще и второй член

приписать. В итоге будет $M = N \frac{(\mu g)^2}{3 kT} J(J+1) H$. Или же $\chi = N \frac{(\mu g)^2}{3 kT} J(J+1)$. Мы получили закон Кюри.

Заметим, что условие $M H \ll kT$ выполняется почти всегда

Диамагнетики

Магнитное поле само создает в диамагнетиках магнитный момент, направленный

против магнитного поля. Диамагнетизм существует во всех материалах, только парамагнетики его забывают.

Рассмотрим модель: вокруг атома вращаются два электрона в разные стороны. Они создают механический и другие моменты, но они компенсируют друг друга. Направим магнитное поле. Один из электронов будет «прижиматься» к ядру, второй – наоборот. Пусть

начальная скорость электрона - v_0 . Пусть текущая скорость v . $F_{\text{я}} = m \frac{v_0^2}{R}$

$$F_{\text{я}} - F_{\text{л}} = \frac{mv^2}{R}. \text{ Вычитаем, приводим: } \Delta v = e \frac{H}{2 m_e c} R. \text{ Внимание! ЗНАК } \Delta v$$

одинаков для обоих электронов! То, что один замедлился – так скорость одного была отрицательна. А поэтому возникает магнитный (потому что механический) дополнительный

момент против поля: $dM = -2 \frac{e^2 R^2}{4 m_e^2 c^2}$. Ура. Диамагнетизм объяснили.