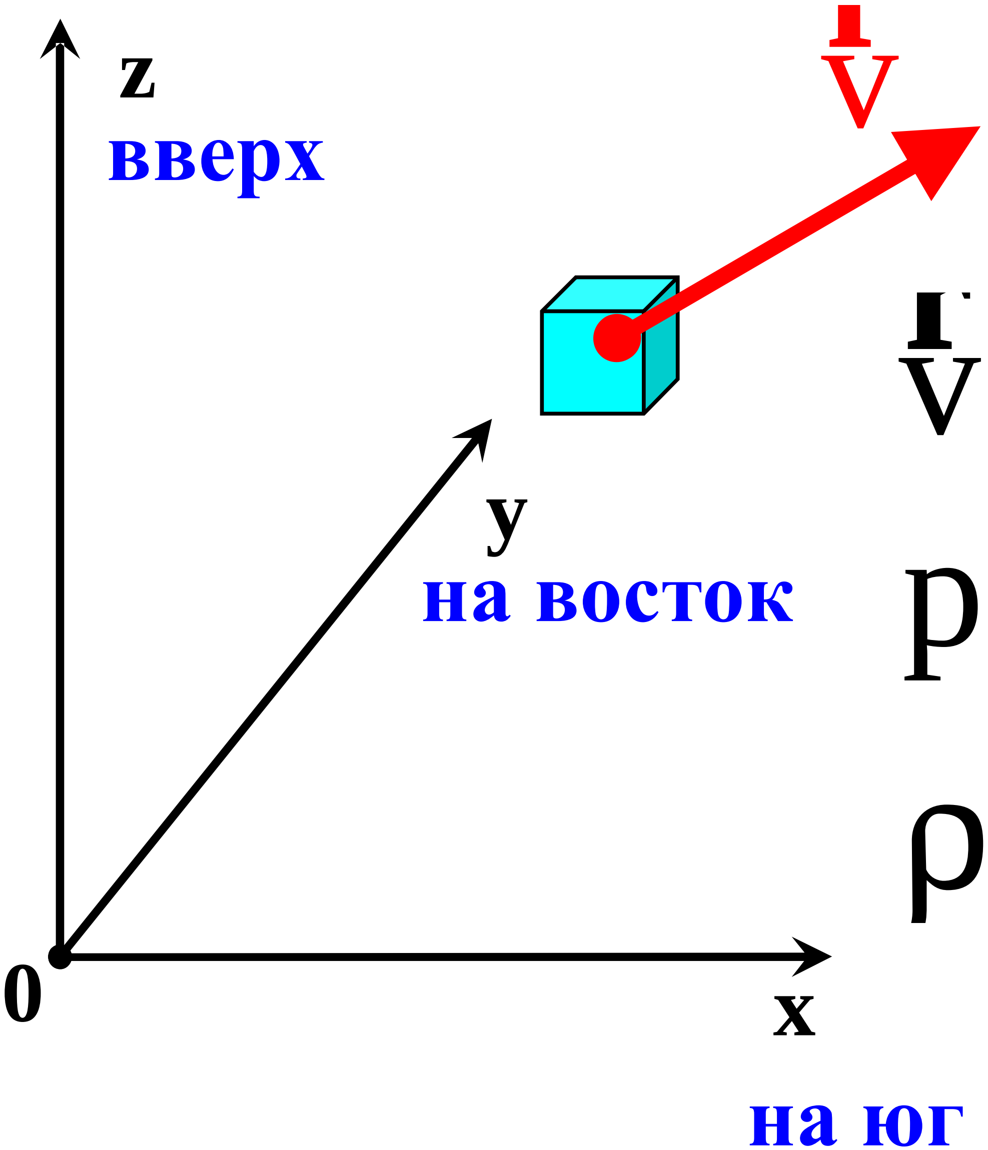
Уравнения аэрогидромеханики



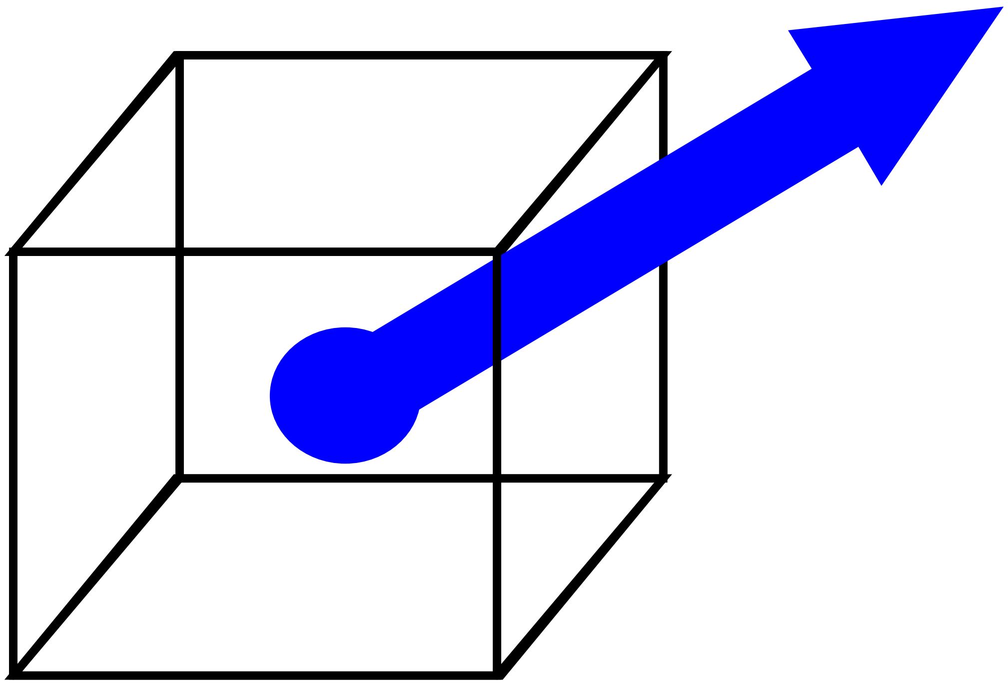
$$\vec{V} \equiv \{u, v, w\}$$

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

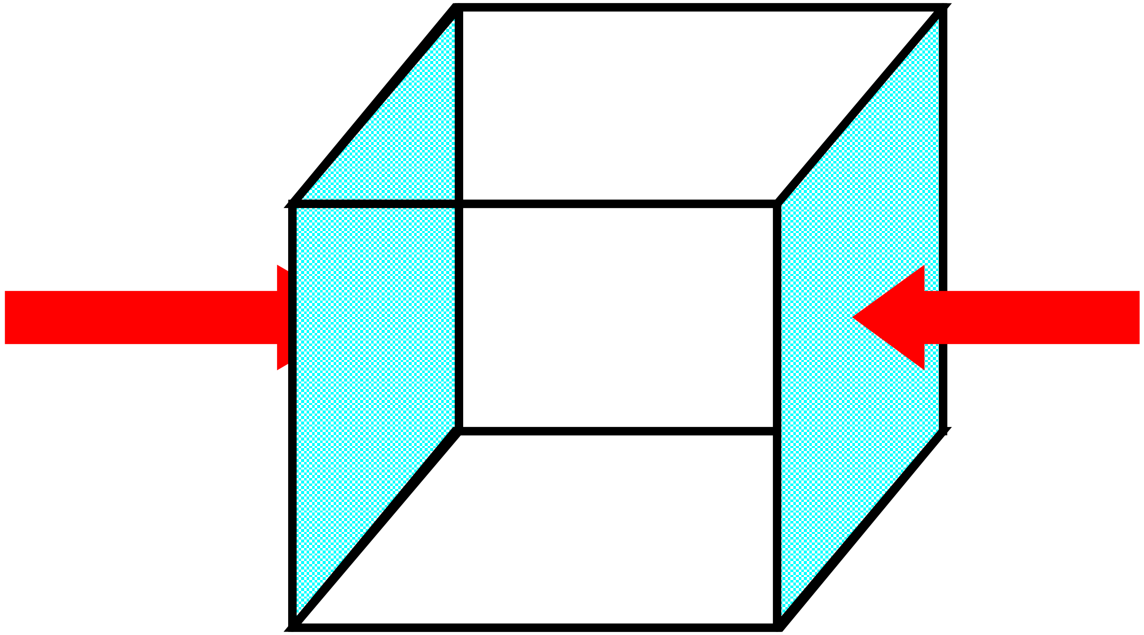
Массовые силы $F_{масс} \sim m$



- сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, …)
- силы инерции (Кориолиса, центробежная)

Сила градиента давления

$$p(x, y, z)\,dy\,dz$$



$$p(x + dx, y, z)\,dy\,dz$$

Сила градиента давления

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{du}{dt} = \left[p(x, y, z) - p(x + dx, y, z)\right] dy\, dz;$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{dv}{dt} = \left[p(x, y, z) - p(x, y + dy, z)\right] dx\, dz;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{dw}{dt} = \left[p(x, y, z) - p(x, y, z + dz)\right] dx\, dy;$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Сила градиента давления

$$F_{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p;$$

$$F_{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p;$$

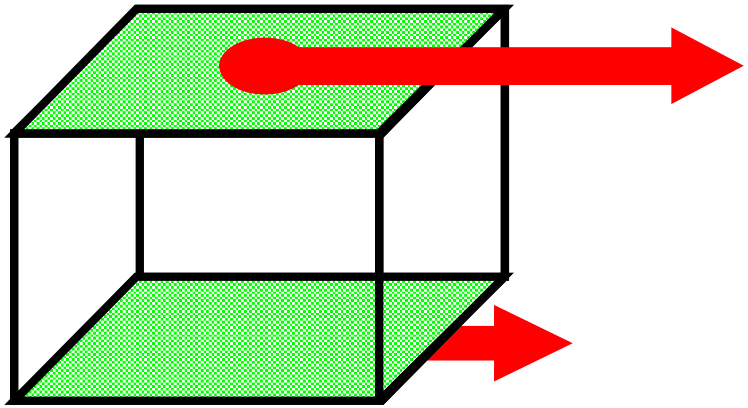
$$\vec{\nabla} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Сила вязкого трения

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$$

напряжение трения

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+dz} dx\ dy$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z} dx\ dy$$

Сила вязкого трения

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{du}{dt} =$$

$$= \left[\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z+dz} - \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z} \right] dx\, dy +$$

$$+ \left[\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y} \right] dx\, dz +$$

$$+ \left[\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} \right] dy\, dz;$$

Сила вязкого трения

$$\frac{du}{dt} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \equiv \nu \Delta u;$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\vec{F}_{тр} = \nu \Delta \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{grad}\,p} + \vec{F}_{\text{масс}} + \vec{F}_{\text{тр}};$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$u = u(x, y, z, t) = u\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_j$$

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

$$\rho = \rho(p).$$

система уравнений замкнута!!!

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v};$$

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

уравнение неразрывности

$$\rho = \rho(p).$$

уравнение состояния

Система уравнений гидродинамики

+уравнения переноса тепла и соли

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) T = \chi \Delta T;$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) s = \vartheta \Delta s;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

$$\rho = \rho(p, T, s).$$

Основные упрощения уравнений гидродинамики

Приближение №1: «несжимаемая жидкость (газ)»

$$\rho = \rho_0 = \text{const}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

$$\rho = \rho(p).$$

ρ_0

Приближение №1: «несжимаемая жидкость (газ)»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0.$$

Приближение №2: «стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v};$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0;$$

$$\rho = \rho(p).$$

Приближение №3:
«идеальная (невязкая) жидкость»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

$$\rho = \rho(p).$$

Приближение №4:
«идеальная несжимаемая жидкость, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2[\vec{v}\times\vec{\omega}];$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

Приближение №4:
«идеальная несжимаемая жидкость, линейное приближение»

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\cancel{(\vec{v},\vec{\nabla})}\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0}+\vec{g}+2[\vec{v}\times\vec{\omega}];$$

$$\operatorname{div}(\vec{v})=0$$

если $\left\{\begin{matrix}\vec{v}_1, p_1\\ \vec{v}_2, p_2\end{matrix}\right\}$ – решения системы, то $\Rightarrow$

$A\vec{v}_1+B\vec{v}_2, Ap_1+Bp_2$ – решения системы

где A, B – константы

«Геофизические» приближения:

1. Геострофическое приближение

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}];$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

1. Геострофическое приближение

$$-\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0;$$

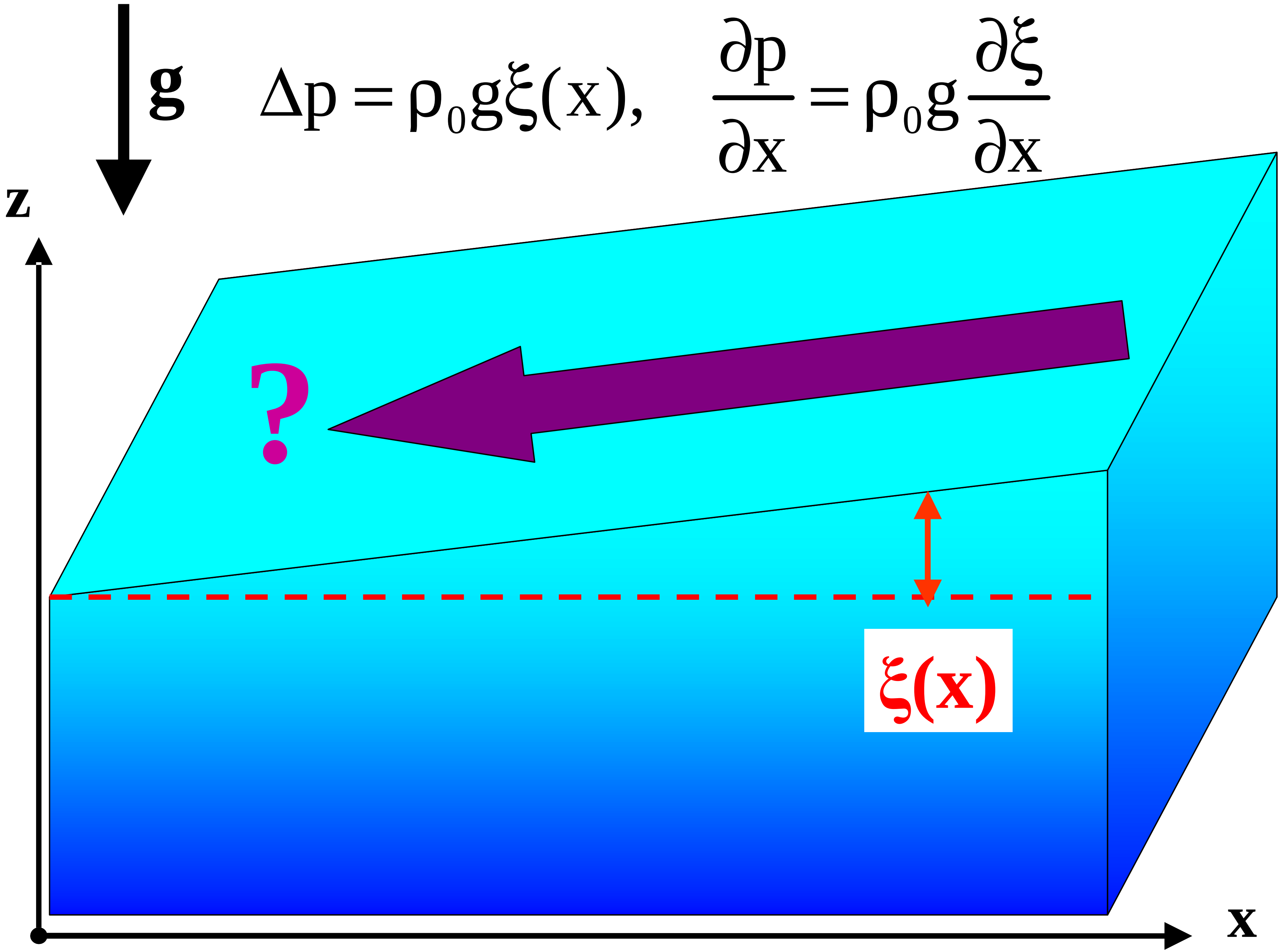
$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

1. Геострофическое приближение

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+2\omega v\sin\varphi=0;$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-2\omega u\sin\varphi=0.$$

$$\Delta p = \rho_0 g \xi(x), \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

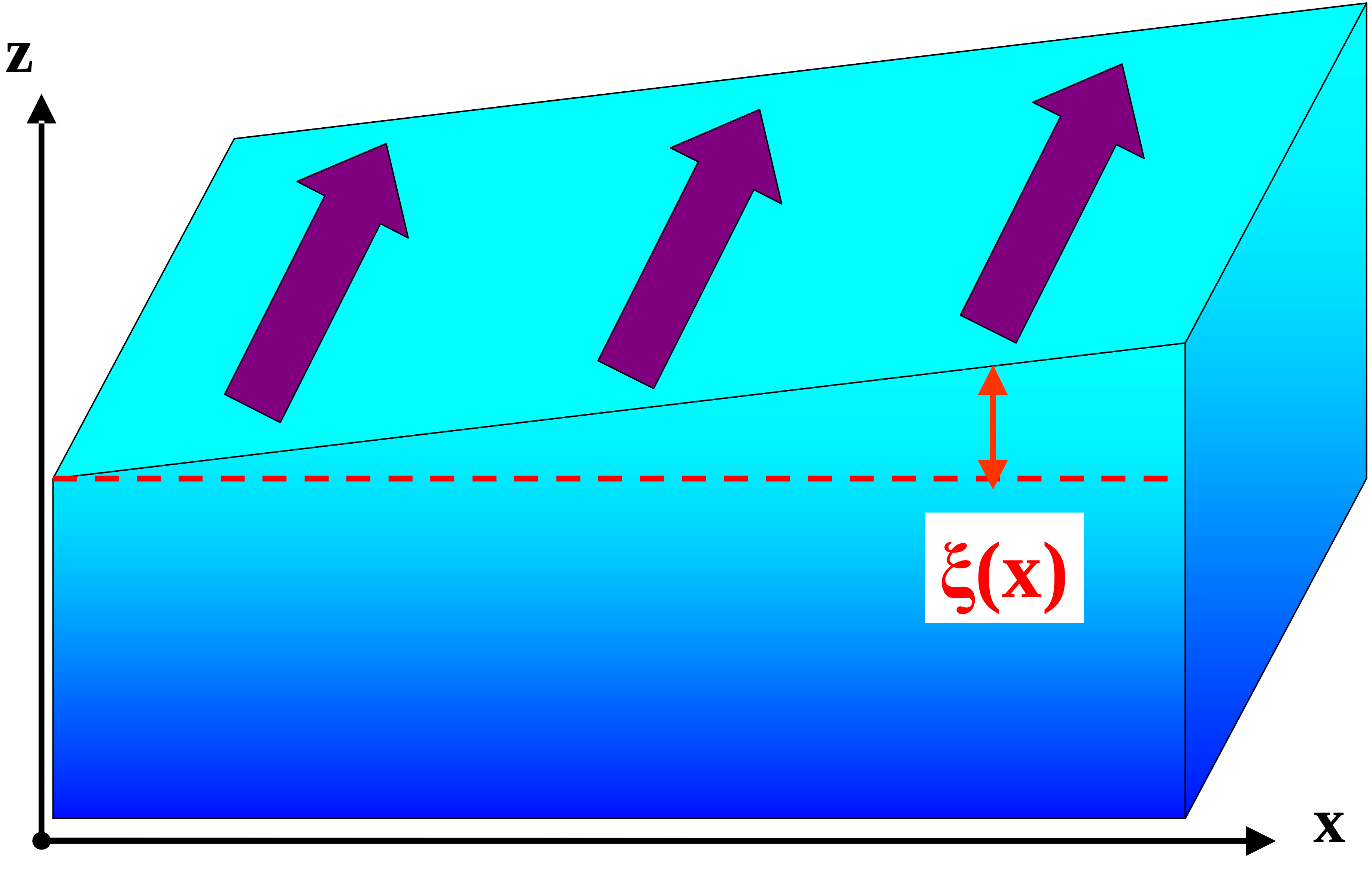


$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\omega v \sin\varphi = 0 \\ -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\omega u \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

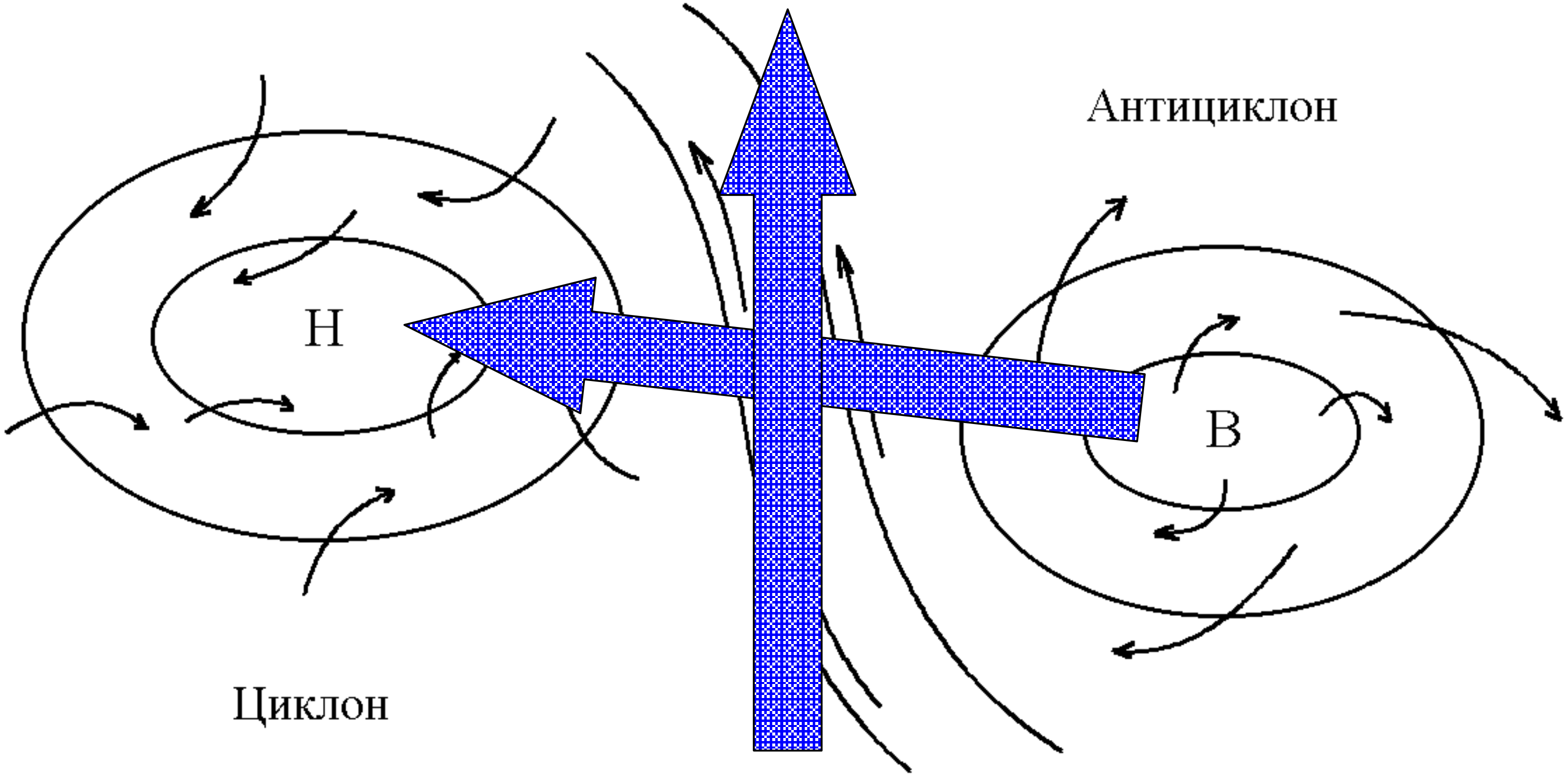
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

$$v = \frac{g}{2\omega \sin\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Геострофическое течение



Геострофический ветер



«Геофизические» приближения:

2. Приближение Буссинеска

Предположения:

$$T = T_0 + T', \quad T' << T_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho' << \rho_0$$

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \alpha T'$$

температурный коэффициент расширения жидкости (газа)

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g} \quad (p_0 = p_{атм} - \rho_0 g\, z)$$

2. Приближение Буссинеска

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{1 + \rho'/\rho_0} \approx$$

$$\approx \frac{1 - \rho'/\rho_0}{\rho_0}\vec{\nabla}(p_0 + p') =$$

$$= \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \frac{\rho'\vec{\nabla} p_0}{\rho_0^{2}} - \cancel{\frac{\rho'\vec{\nabla} p'}{\rho_0^{2}}}.$$

$$\vec{g} \qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha T'\vec{g}$$

2. Приближение Буссинеска

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \vec{g} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} + \alpha T'\vec{g};$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \nu\Delta\vec{v};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \alpha T'\vec{g} + \nu\Delta\vec{v} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

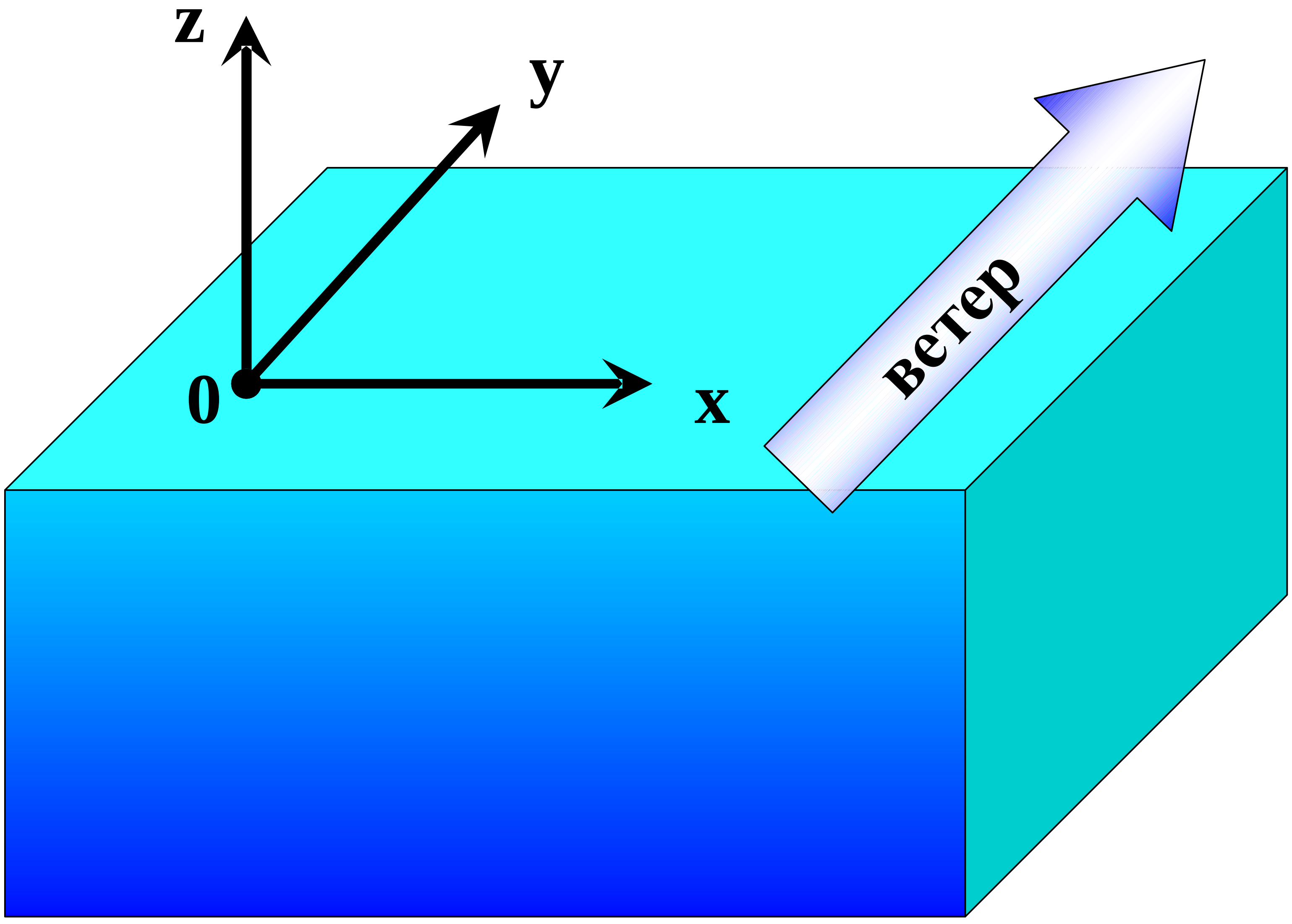
вариациями плотности пренебрегаем

«Геофизические» приближения:

3. Циклострофическое приближение

$$\frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Дрейфовое течение
(течение, вызываемое ветром)



Предположения об искомом течении:

- стационарно;
- однородно по горизонтали.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \text{const}$$

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2[\vec{v}\times\vec{\omega}] + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g}$$

$$\begin{cases} \cancel{-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}} + 2v\omega\sin\varphi + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\ \cancel{-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}} - 2u\omega\sin\varphi + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0, \\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
2v\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\
-2u\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0, \\
-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g = 0
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad p(z) = p_{атм} - \rho g z
$$

$$\begin{cases} 2v\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\ -2u\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия:

$$\rho\nu\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0; \qquad u_{z\to-\infty} = 0;$$

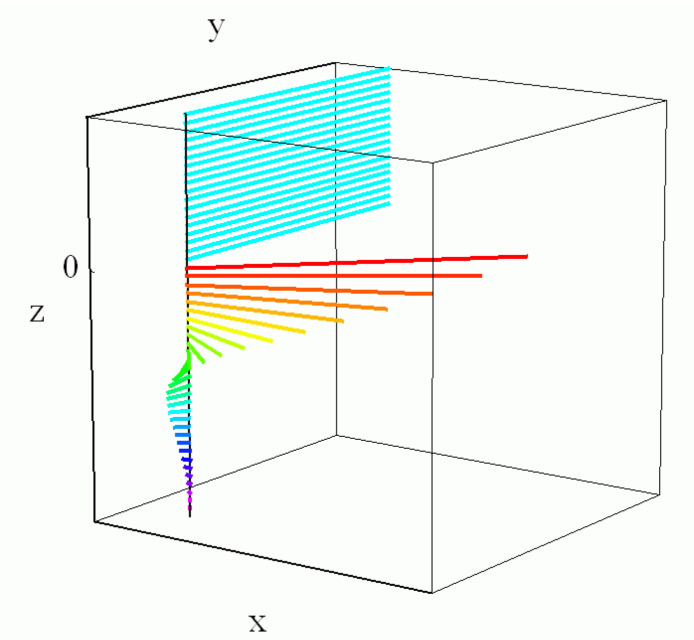
$$\rho\nu\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \tau \qquad v_{z\to-\infty} = 0$$

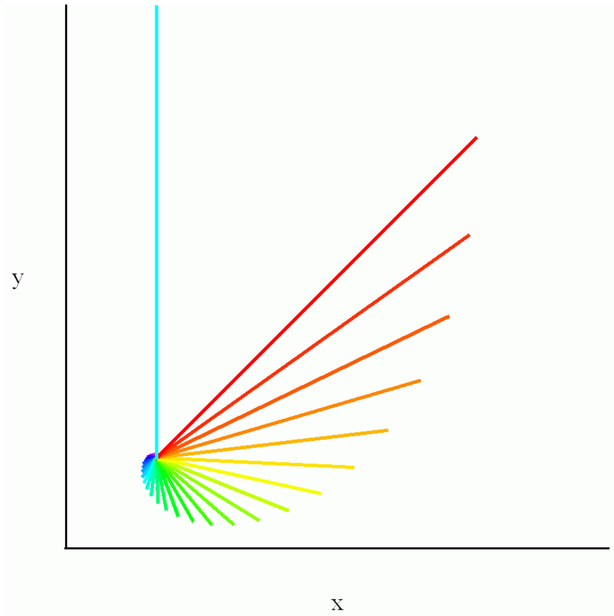
Решение (спираль Экмана)

$$u = V_0 e^{az} \cos(\pi/4 + az);$$

$$v = V_0 e^{az} \sin(\pi/4 + az);$$

$$V_0 = \sqrt{2}\frac{\tau}{\rho \nu a}; \quad a^2 = \frac{\omega \sin\varphi}{\nu}$$





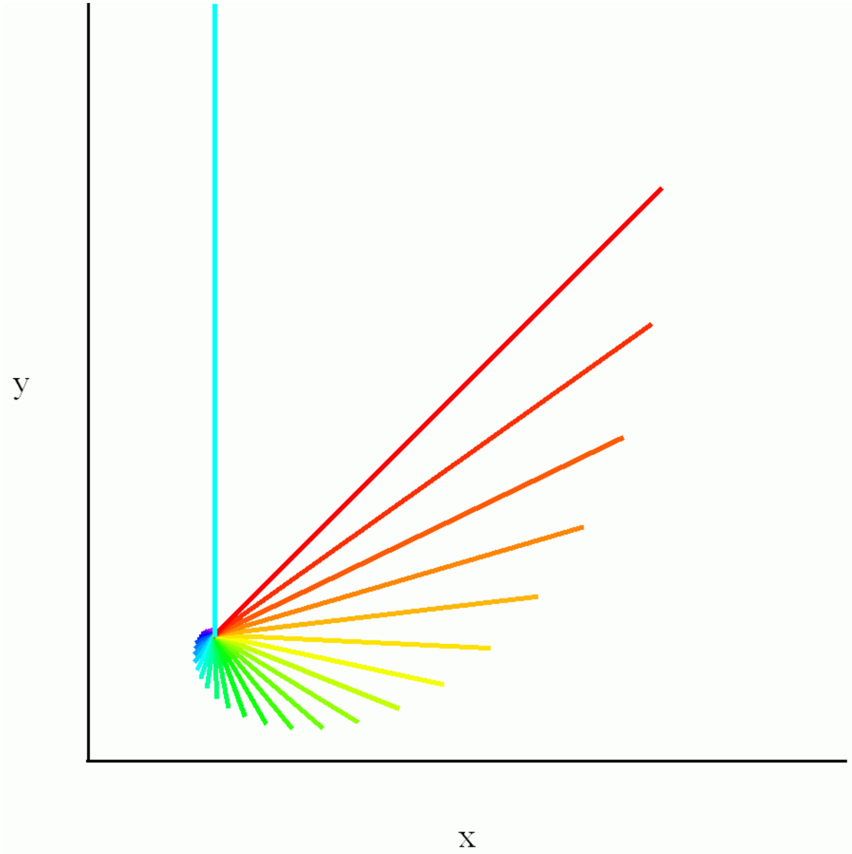
Решение (спираль Экмана)

$$u = V_0 e^{az} \cos(\pi/4 + az);$$

$$v = V_0 e^{az} \sin(\pi/4 + az);$$

$$\int_{-\infty}^{0} u(z)dz = \frac{V_0}{a\sqrt{2}} > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{0} v(z)dz = 0$$



Интегральный перенос вод перпендикулярен направлению ветра!!!

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ОКЕАНЕ

типы волн в океане

(классификация по типу возвращающей силы)

- гравитационные (поверхностные и внутренние) – сила тяжести;
- капиллярные (гравитационно-капиллярные) – сила поверхностного натяжения;
- акустические – сила упругости;
- гироскопические или инерционные – сила Кориолиса.

типы волн в океане

(классификация по причине возникновения)

- ветровые
- приливные
- анемобарические
- сейсмические (цунами)
- …
- корабельные
- …

Гравитационные поверхностные волны

Математическое описание волновых движений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v},\vec{\nabla})\vec{v}} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} \\ \cancel{\dfrac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

$$\rho = \rho_0 = \text{const}$$

Система уравнений для описания линейных гравитационных волн в однородной несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} \\ \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases}$$

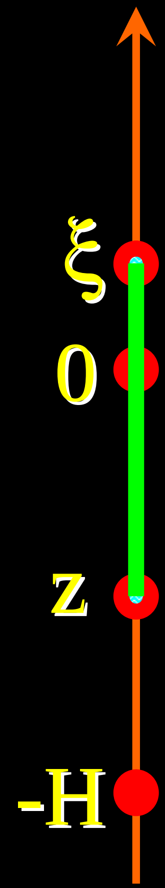
Линейная теория длинных волн («мелкой воды» $\lambda \gg H$)

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\int_{z}^{\xi} dz \;\Big|\; 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$



$$p(x,y,z,t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x,y,t) - \rho g z$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\int_{-H}^{\xi} dz \left| \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ H\left(\dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial \xi}{\partial t} \end{cases}$$

$$(u^*, v^*) = \frac{1}{H}\int_{-H}^{\xi}(u, v)dz \approx \frac{1}{H}\int_{-H}^{0}(u, v)dz$$

$$\xi << H$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial v^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\[2ex]
H\left(\dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial \xi}{\partial t}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial v^*}{\partial t} = -g\dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex]
H\left(\dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial \xi}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial t}
\end{cases}
$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gH\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)$$

$c = \sqrt{gH}$ – скорость длинных волн

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gH\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)$$

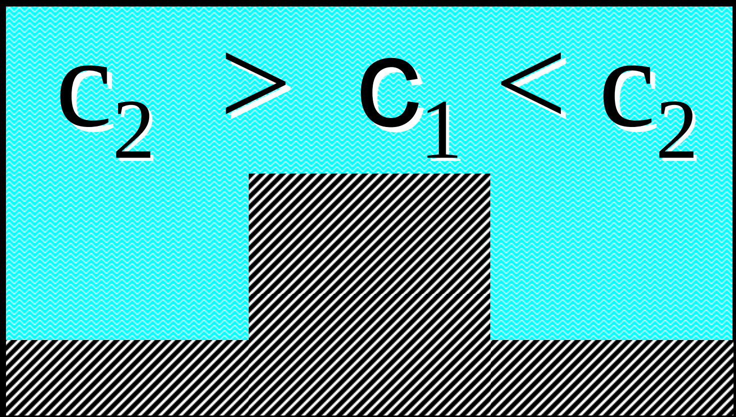
$c = \sqrt{gH}$ – скорость длинных волн

топография дна влияет на

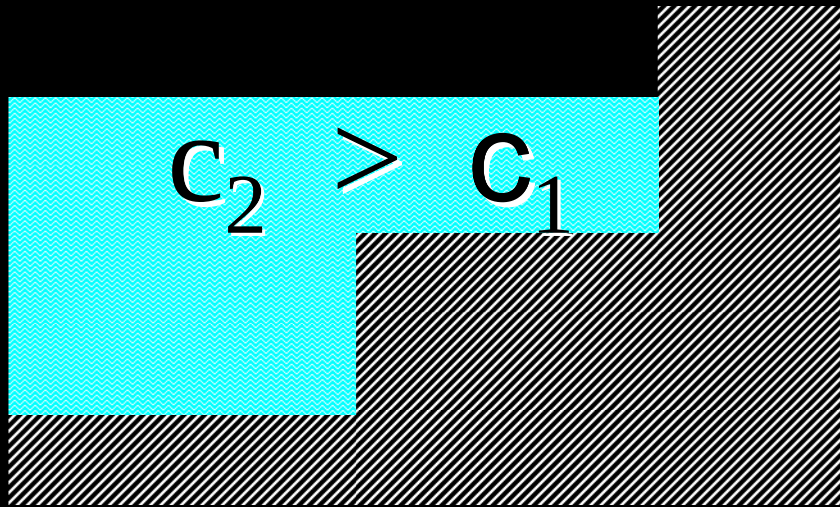
! распространение длинных волн !

Захваченные волны

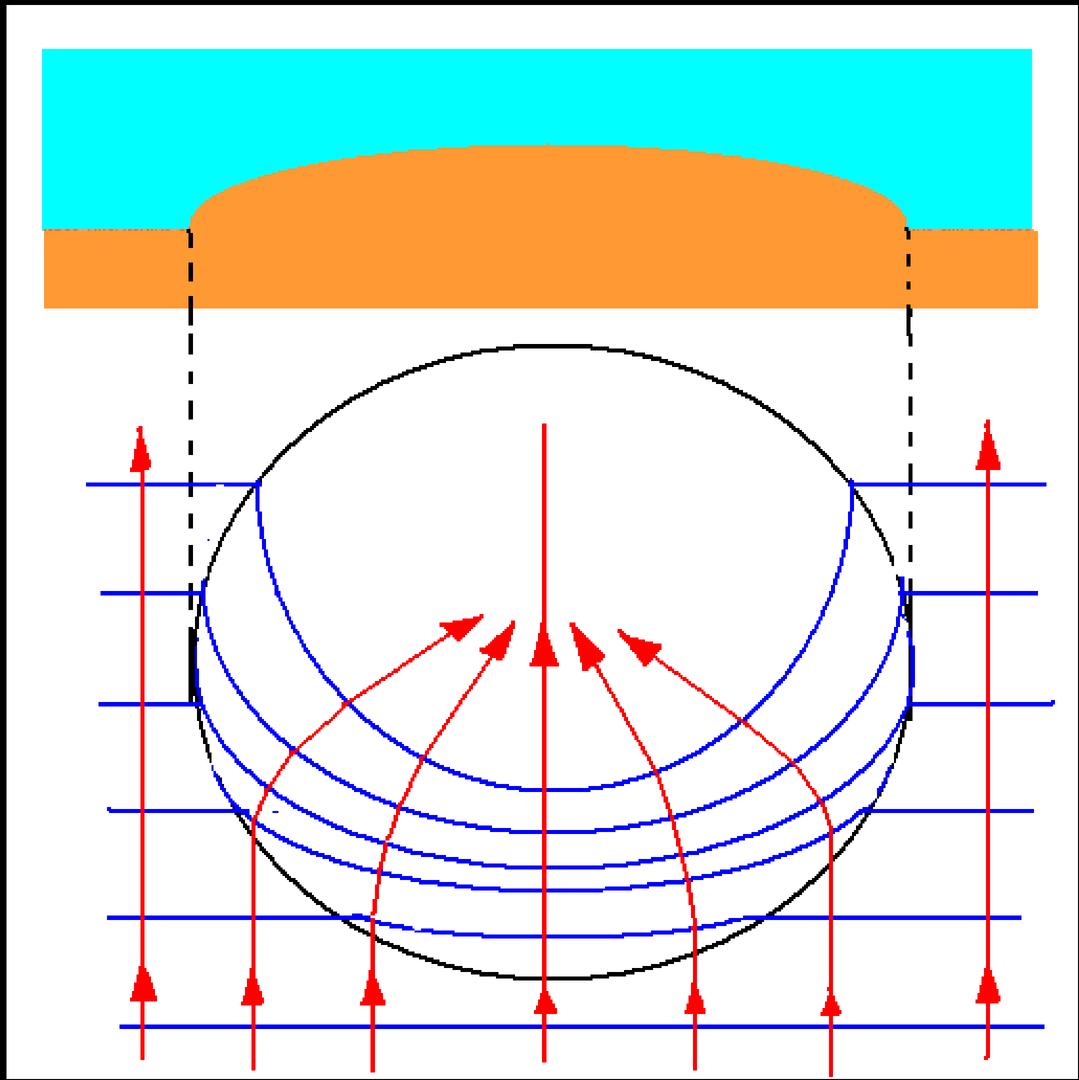
подводный
хребет



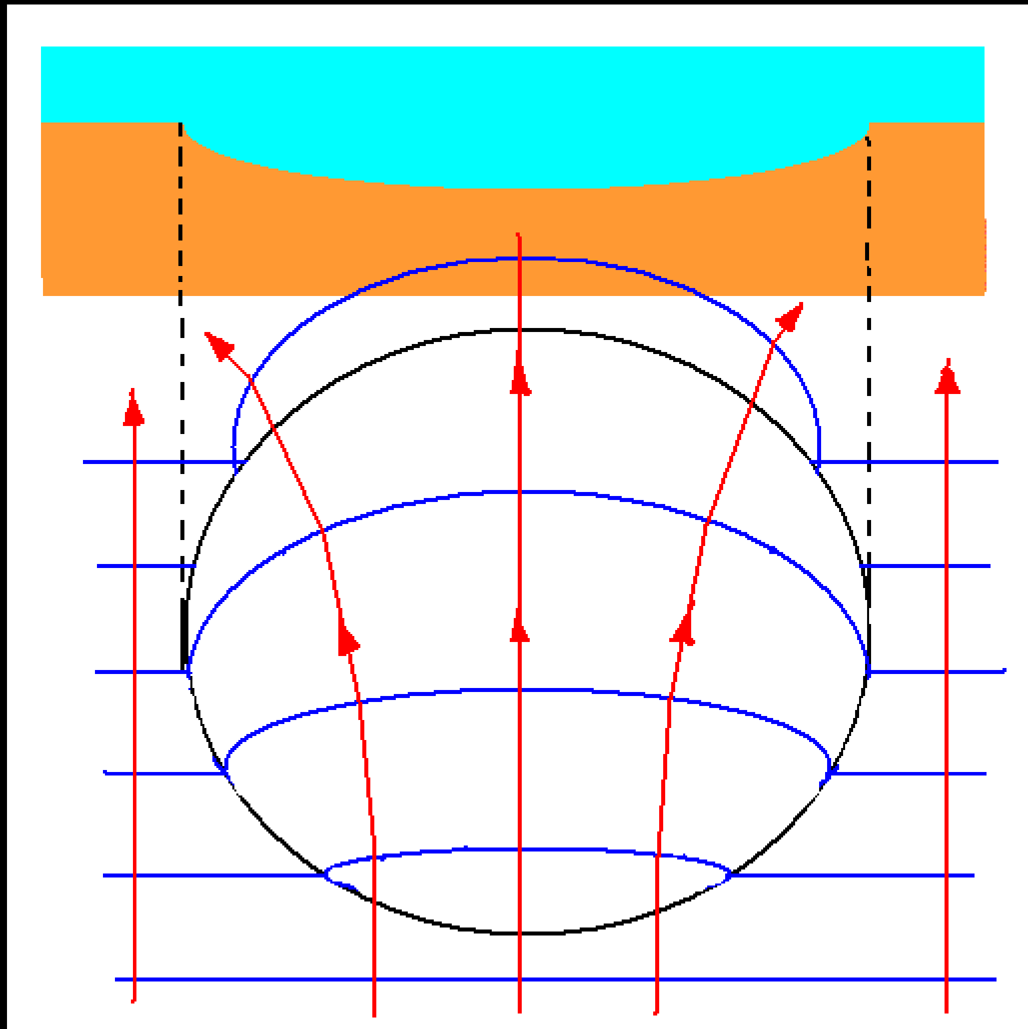
материковый
склон и берег



Фокусировка длинных волн



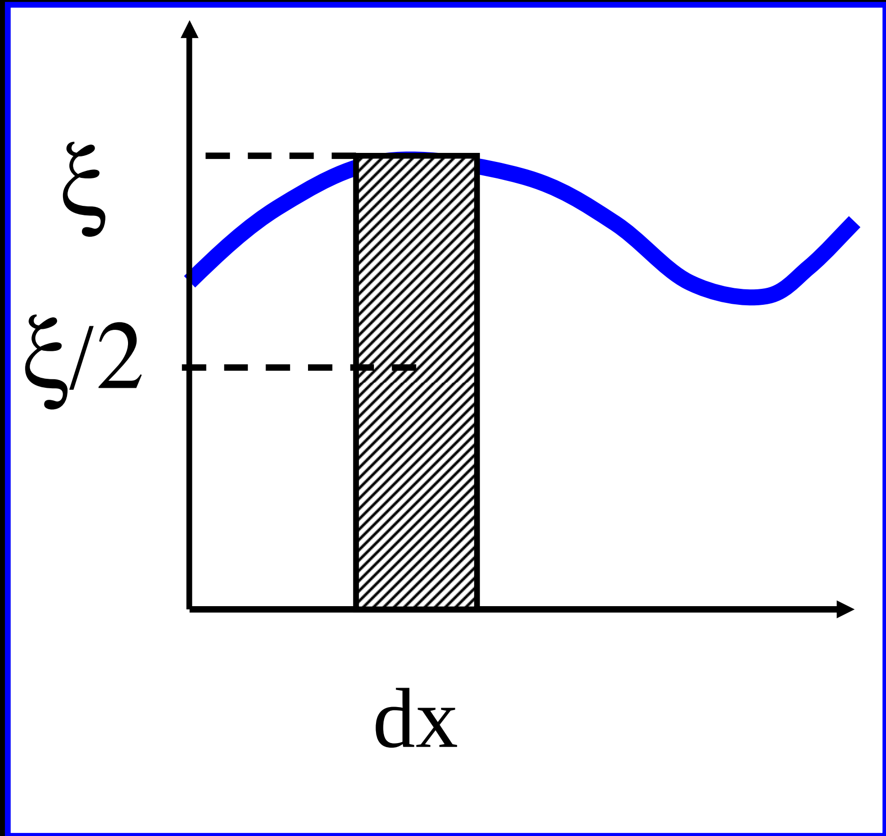
Дефокусировка длинных волн



Закон Грина (закон "1/4")

$$W_k = W_p$$

$$W_\Sigma = 2W_p = \rho g \int_x^{x+\lambda} \xi^2 dx$$



$$W_\Sigma = \rho g \int_t^{t+T} \xi^2 \sqrt{gH}\, dt$$

$$\rho g \xi_0^{\,2} \sqrt{gH}\, C_0 = const$$

$$\xi_0 H^{1/4} = const$$

При уменьшении глубины амплитуда волны растет