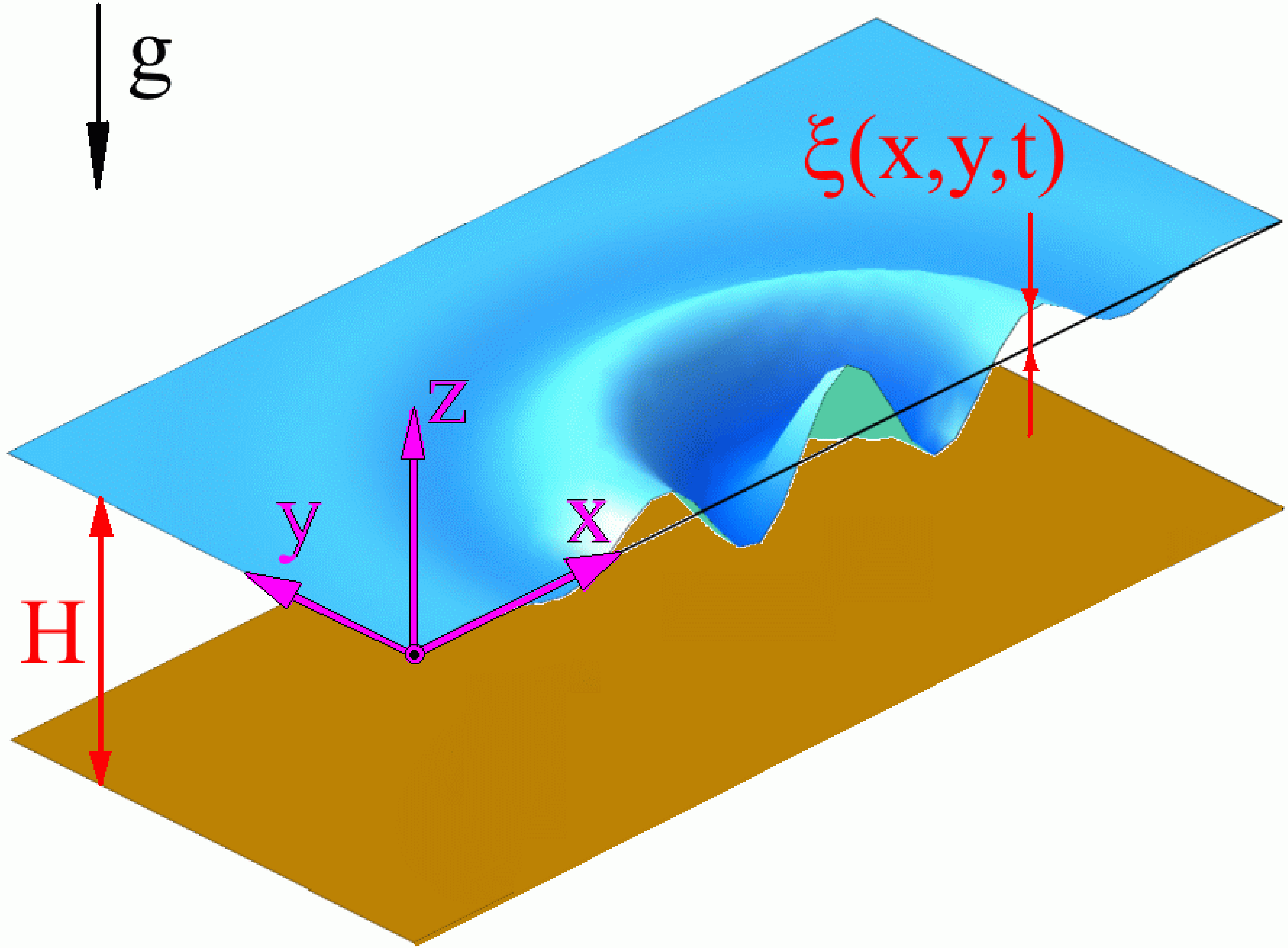
Линейная потенциальная теория волн

(потенциальная теория волн бесконечно малой амплитуды)

$$\lambda < H, \quad \lambda \sim H, \quad \lambda > H$$


g
ξ(x,y,t)
z
y
x
H

$$\vec{v} = \vec{\nabla} F$$

$$\vec{g} = \vec{\nabla}\left(-gz\right)$$

потенциал скорости течения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho} + g z \right) = 0 \\
\operatorname{div} \vec{\nabla} F = 0
\end{cases}
$$

используется для постановки граничного условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho} + g\,z = \text{const} \neq f\,(x, y, z) \\ \Delta\,F = 0 \text{ или } \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

основное уравнение потенциальной теории волн

Граничные условия:

Дно: **условие «непротекания»**

$$z = -H: \quad w = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Граничные условия:

Поверхность:

$$z = 0: \qquad p = p_{атм} = const$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g\,z = const$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p_{атм}}{\rho} + g\xi = const \qquad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

Граничные условия:

Поверхность:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = w; \quad w = \frac{\partial F}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Граничные условия:

$$z = -H: \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

$$F(x,y,z,t) =$$

$$= \left[A\,\mathrm{sh}(kz) + B\,\mathrm{ch}(kz)\right]\cos\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{x}\right)$$

$$z = 0: \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = A\frac{gk}{\omega^2}$$

$$z = -H: \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ch}(kH) = \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{sh}(kH)$$

Дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

Дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

Предельные случаи:

$$1)\; kH >> 1 \Leftrightarrow H/\lambda >> 1 \quad \Rightarrow \omega^2 = gk \quad \text{"глубокая вода"}$$

$$2)\; kH << 1 \Leftrightarrow H/\lambda << 1 \quad \Rightarrow \omega^2 = gHk^2 \quad \text{"мелкая вода"}$$

Дисперсионное соотношение для

гравитационно – капиллярных волн в жидкости

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \mathrm{th}(kH)$$

Фазовая и групповая скорости волн

$$\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) =$$

$$= 2\cos(c_{фаз} t - x)\cos(c_{гр} t - x)$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \to \frac{\omega}{k}$$

$$c_{гр} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \to \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} - \text{фазовая скорость}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} - \text{групповая скорость}$$

"глубокая вода"

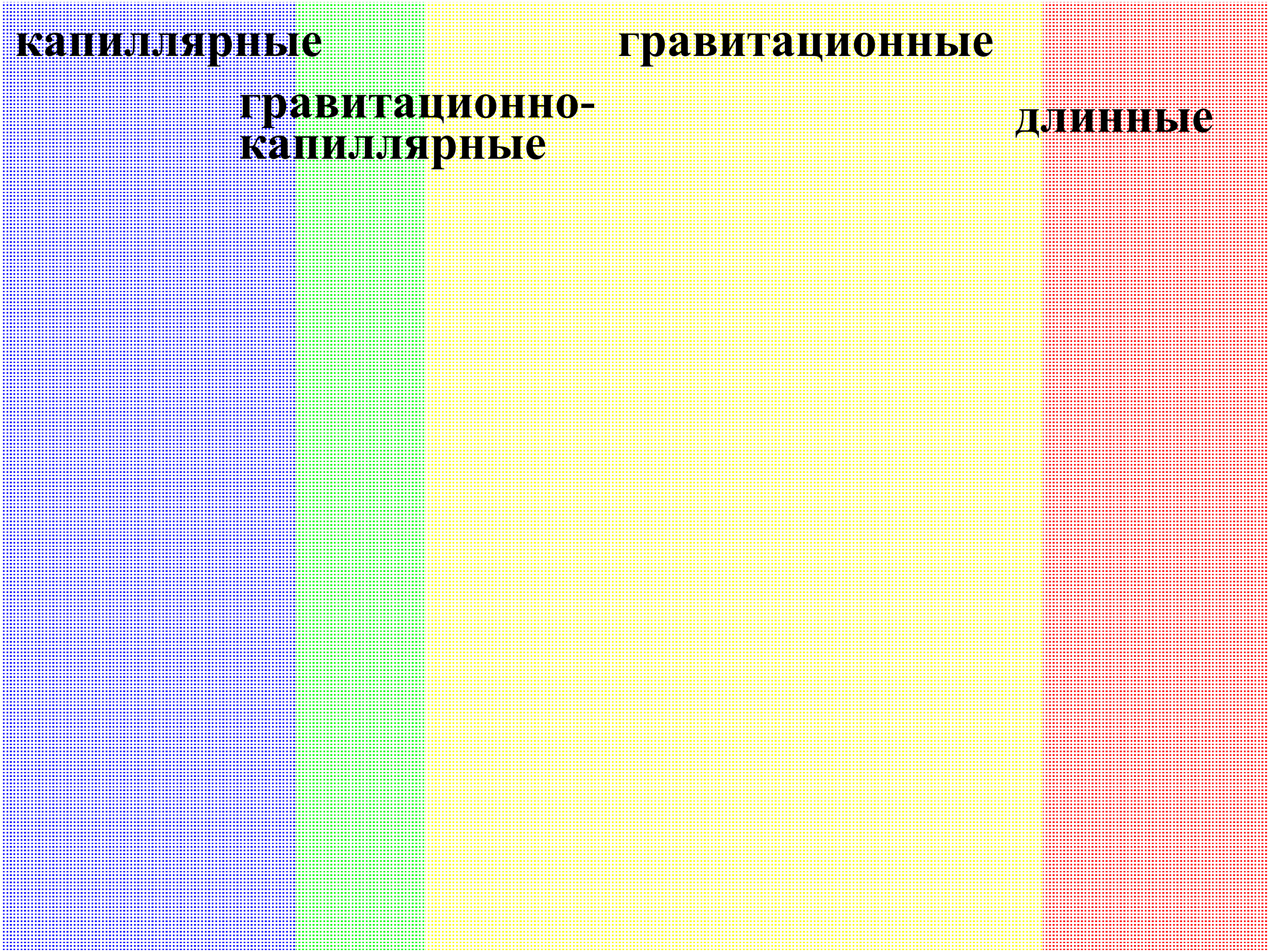
$$c_{\text{фаз}} = 2\, c_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

"мелкая вода"

$$c_{\text{фаз}} = c_{\text{гр}} = \sqrt{gH}$$

капиллярные волны

$$c_{\text{фаз}} = \frac{2}{3} c_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\alpha k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$$


капиллярные
гравитационные
гравитационно-капиллярные
длинные

$$F(x,z,t) = A\left[\operatorname{sh}(kz) + \frac{gk}{\omega^2}\operatorname{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - kx);$$

$$\omega^2 = gk\,\operatorname{th}(kH);$$

Поле скорости:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}; \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z};$$

2D модель

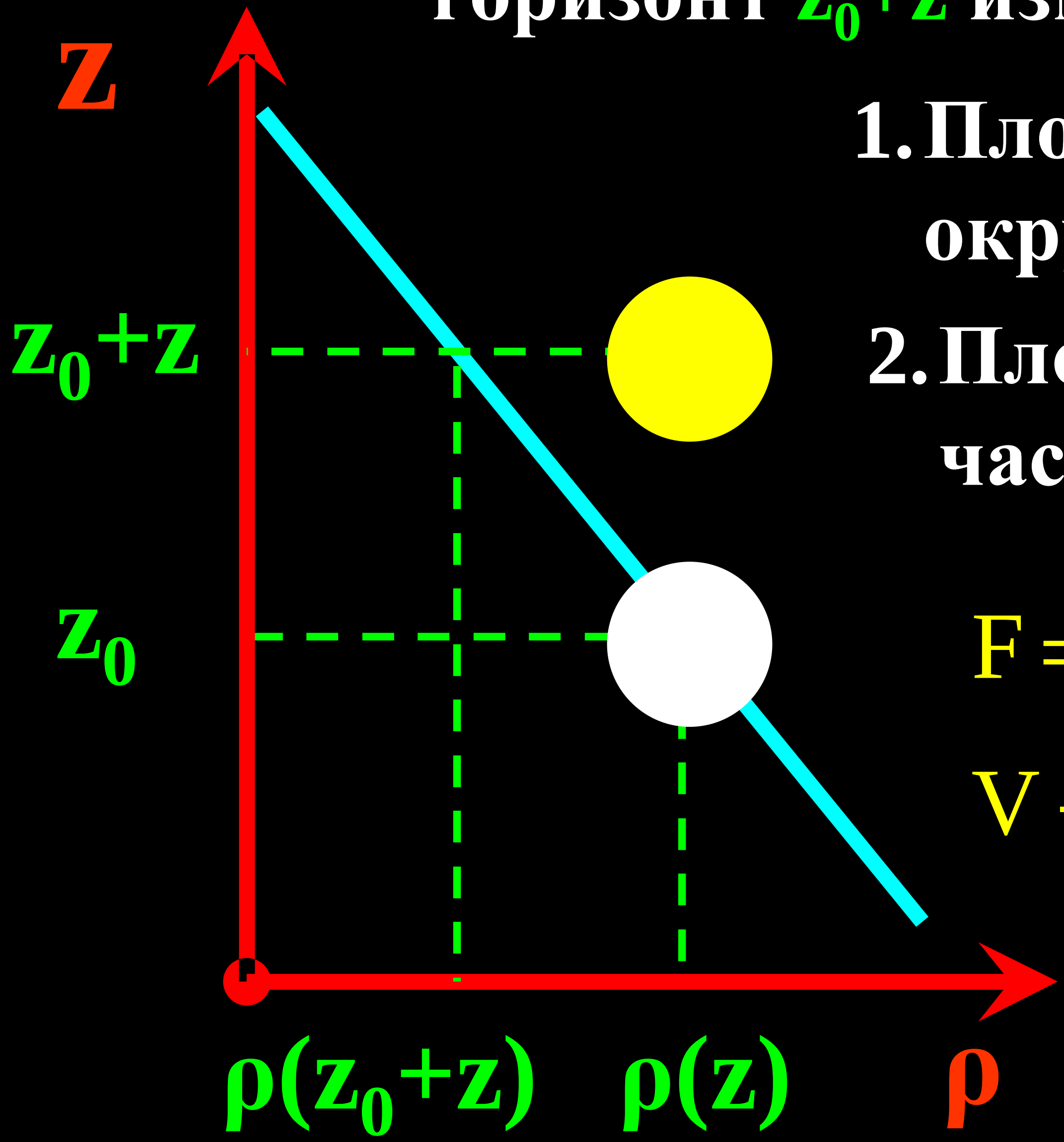
Поле смещений:

$$X = \int_{t_0}^{t} u\,dt; \qquad Z = \int_{t_0}^{t} w\,dt.$$

Внутренние волны

могут образовываться в океане и атмосфере при наличии устойчивой стратификации

При смещении частицы на новый горизонт z_0+z изменяются:



1. **Плотность окружающей среды;**
2. **Плотность самой частицы.**

$$F = gV\left(\rho_{\text{среды}} - \rho_{\text{частицы}}\right)$$

V – объем частицы

изменением объема V пренебрежем

$$F = gV\left(\rho_{\text{среды}}(z_0 + z) - \rho_{\text{частицы}}(z_0 + z)\right);$$

$$\rho_{\text{среды}}(z_0 + z) = \rho_{\text{среды}}(z_0) + \frac{d\rho_{\text{среды}}}{dz} z;$$

$$\rho_{\text{частицы}}(z_0 + z) = \rho_{\text{частицы}}(z_0) + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{\eta} z;$$

$$\rho_{\text{среды}}(z_0) = \rho_{\text{частицы}}(z_0); \quad p(z) = p_0 - \rho g z$$

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{\eta} = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_{\eta} \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{c^2}$$

$$F = gV\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)z;$$

$$\underbrace{\rho V \frac{d^2 z}{dt^2}}_{\text{"ma"}} = \underbrace{gV\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)z}_{\sum F};$$

Частота Вяйсяля-Брента

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0;$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)$$

в океане

$$10^{-4}\,\text{Гц} < N < 10^{-1}\,\text{Гц}$$

Акустические волны в океане

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})}\vec{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \cancel{\vec{g}} + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'; & \vec{v}_0 = 0 \\ p = p_0 + p'; & p' << p_0 \\ \rho = \rho_0 + \rho'; & \rho' << \rho_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} p' = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' = c^2 \rho' \\ c - \text{скорость звука} \\ \vec{v}' = \vec{\nabla} F \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

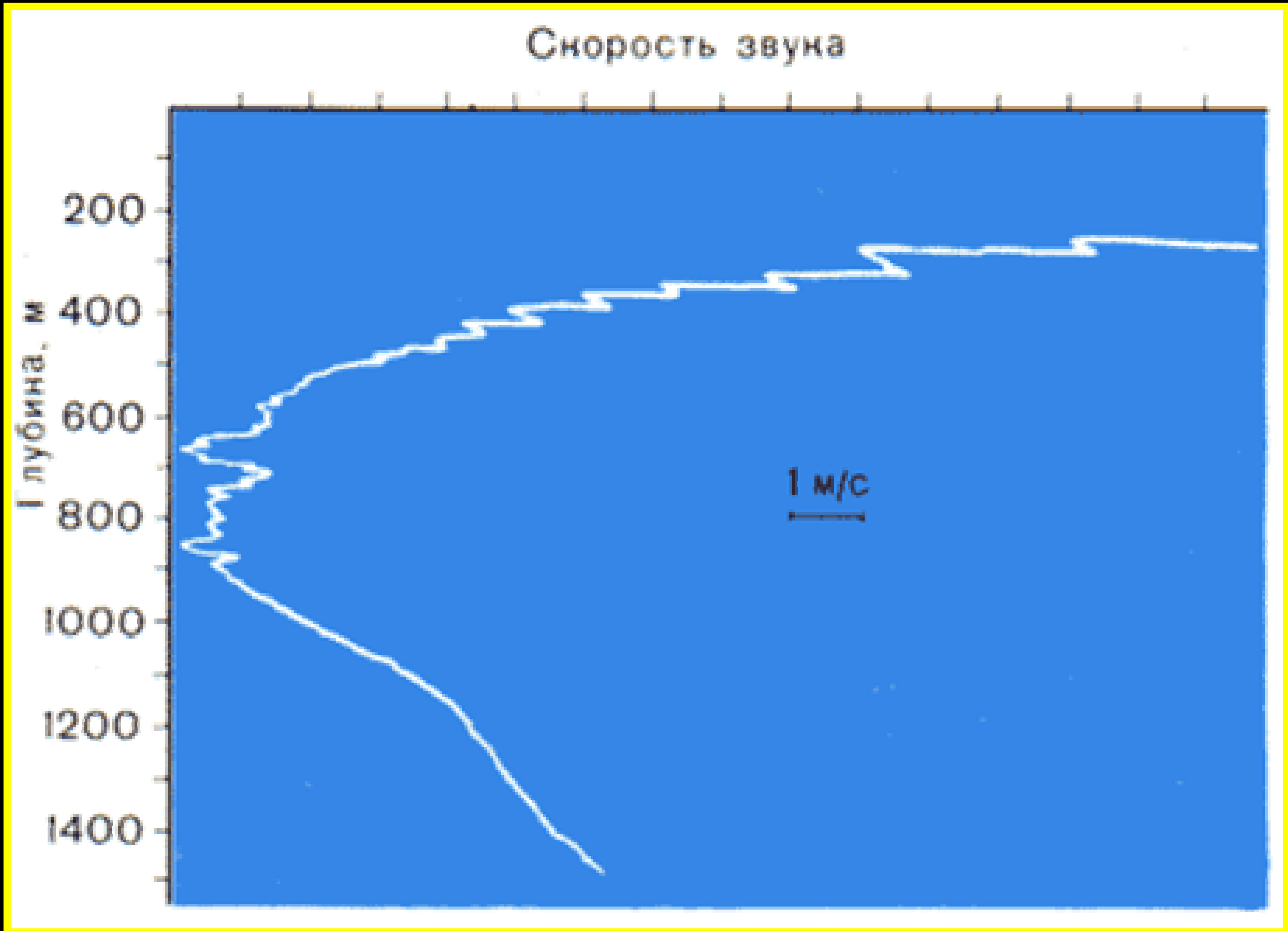
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial(\vec{\nabla} F)}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{\nabla} F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = -\dfrac{p'}{\rho_0} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \Delta F = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2 \Delta F = 0$$ – волновое уравнение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$ – скорость звука

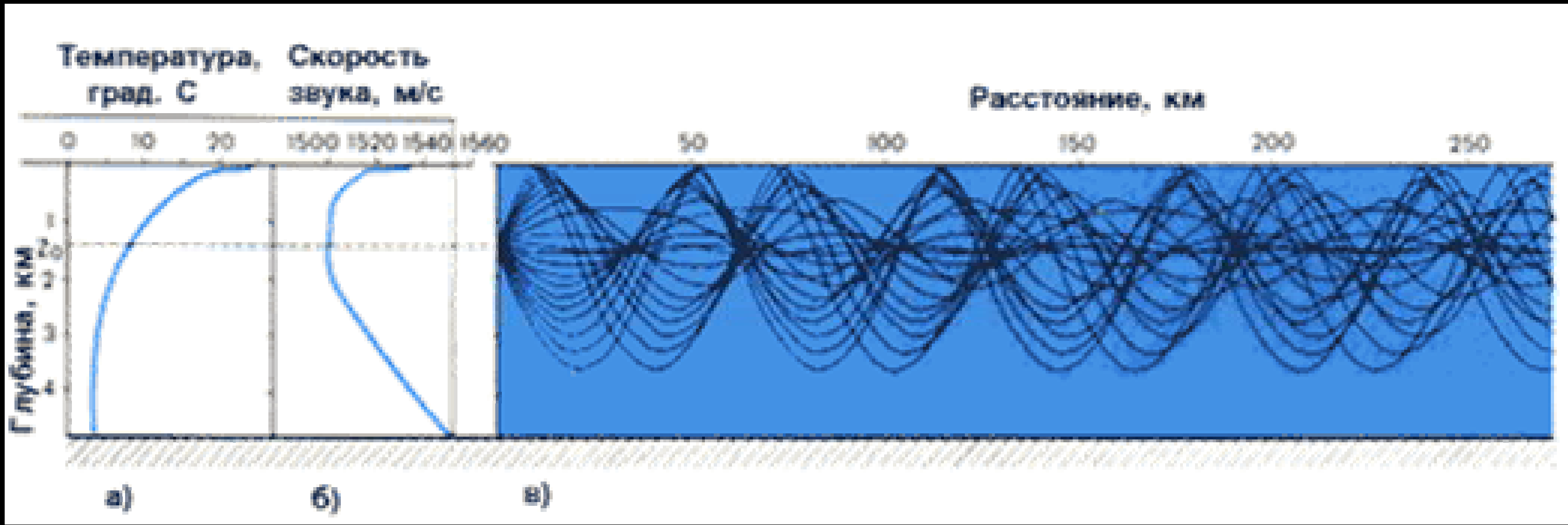
$$1480 \text{ м/с} < \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} < 1545 \text{ м/с}$$

$$\frac{\partial c_{\text{зв}}}{\partial T} > 0, \qquad \frac{\partial c_{\text{зв}}}{\partial p} > 0$$



Скорость звука
200
400
600
800
1000
1200
1400
Глубина, м
1 м/с

Подводный звуковой канал (ПЗК)



Турбулентность

Турбулентность (от лат. *turbulentus* - беспорядочный) неупорядоченное во времени и пространстве поведение диссипативной среды (или поля), детали которого не могут быть воспроизведены на больших интервалах времени при сколь угодно точном задании начальных и граничных условий.

Упрощенная двумерная система уравнений для описания конвективных течений жидкости

(приближение Буссинеска)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w + g\alpha T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\Delta T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Lorenz E., Deterministic Non-periodic Flow, Journal of Atmospheric Sciences, 1963, V.20, P.130-141

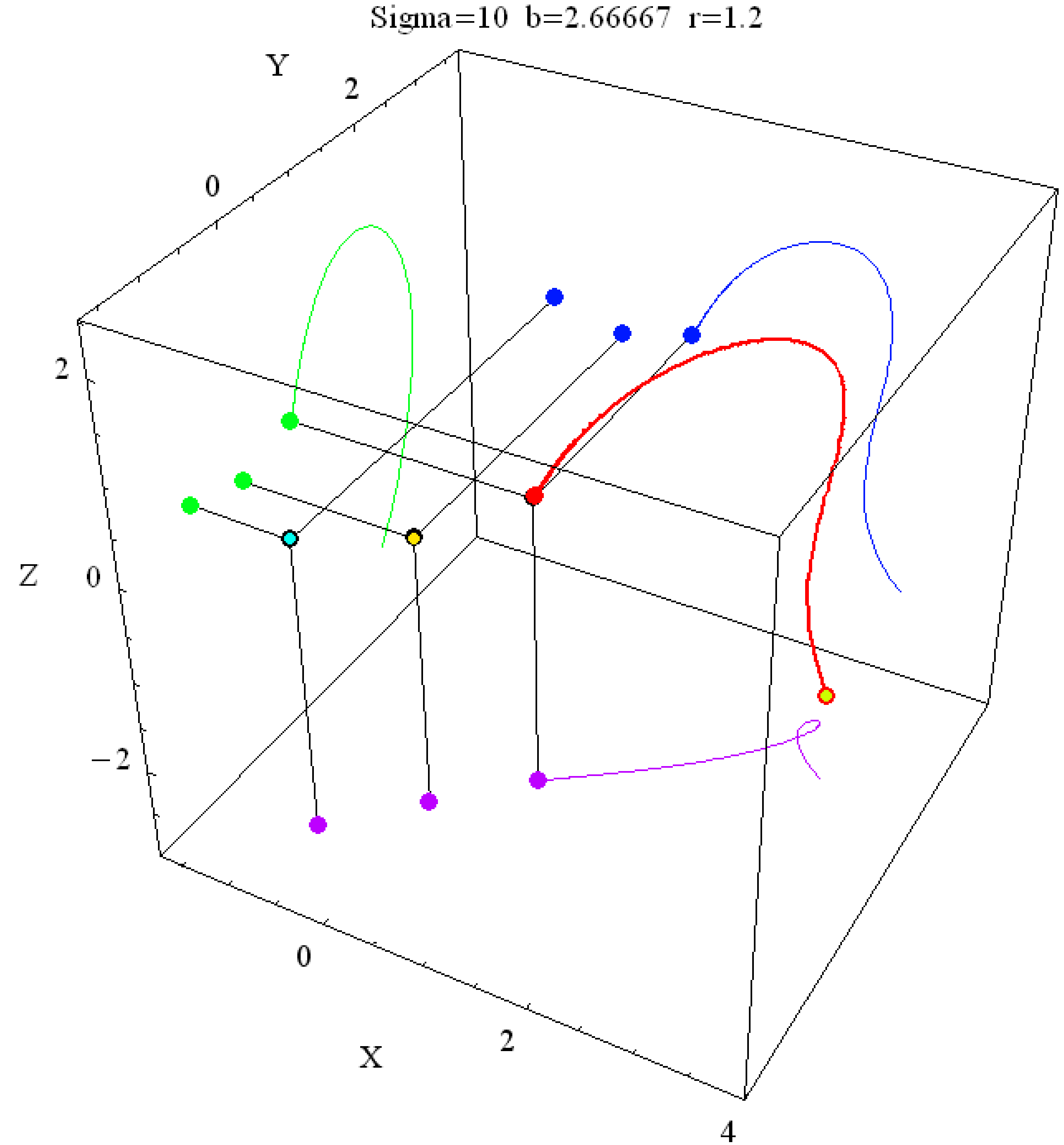
$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ$$

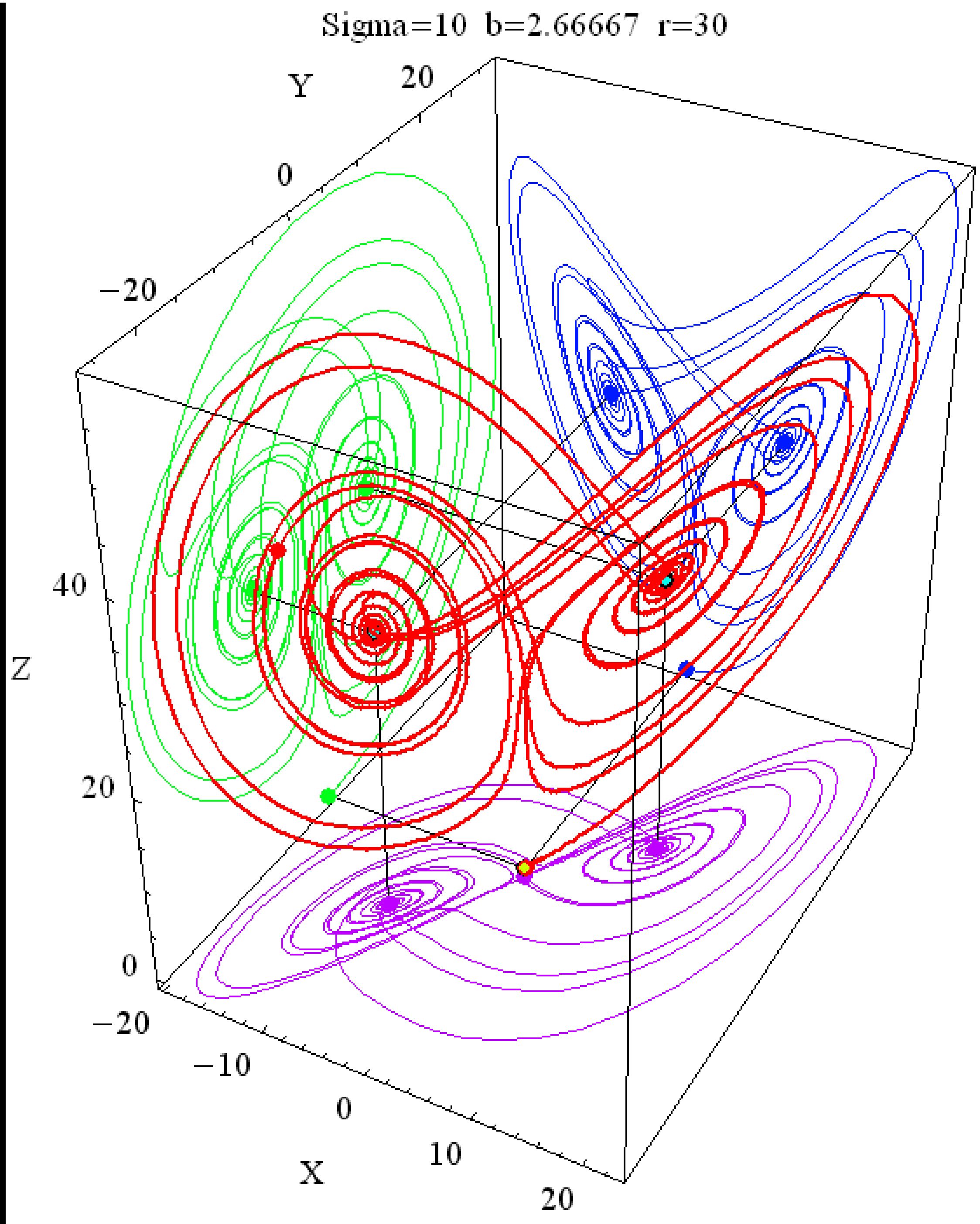
$$\dot{Z} = XY - bZ$$

Система Лоренца – результат упрощения уравнений гидродинамики

«Ламинарный» режим



«Турбулентный» режим



Ламинарные - спокойные и плавные течения, меняющиеся лишь в связи с изменениями действующих сил или внешних условий.

Турбулентные - течения, в которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины испытывают хаотические флуктуации, создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}$$

U – масштаб скорости

L – масштаб длины

$$\frac{(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}}{\nu\Delta\vec{v}} \approx \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re}$$

число Рейнольдса

$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_c$ – течение ламинарное

$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_c$ – течение турбулентное

$$\mathrm{Re}_c \sim 10^2 - 10^3$$

$$\mathrm{Re}_{\text{океан}} = \frac{UL}{\nu} \approx \frac{1[\text{м}/\text{с}] \times 10^3[\text{м}]}{10^{-6}[\text{м}^2/\text{с}]} = 10^9$$

$$\mathrm{Re}_{\text{атмосфера}} = \frac{UL}{\nu} \approx \frac{10[\text{м}/\text{с}] \times 10^3[\text{м}]}{1.5 \cdot 10^{-5}[\text{м}^2/\text{с}]} \approx 10^9$$

Важность изучения турбулентности

для динамики атмосферы и океана обусловлена ее определяющей ролью в процессах обмена импульсом, теплом и веществом

- **погода и климат**
- **первичная продуктивность**
- **транспорт примесей (в т.ч. загрязнений)**
- **…**

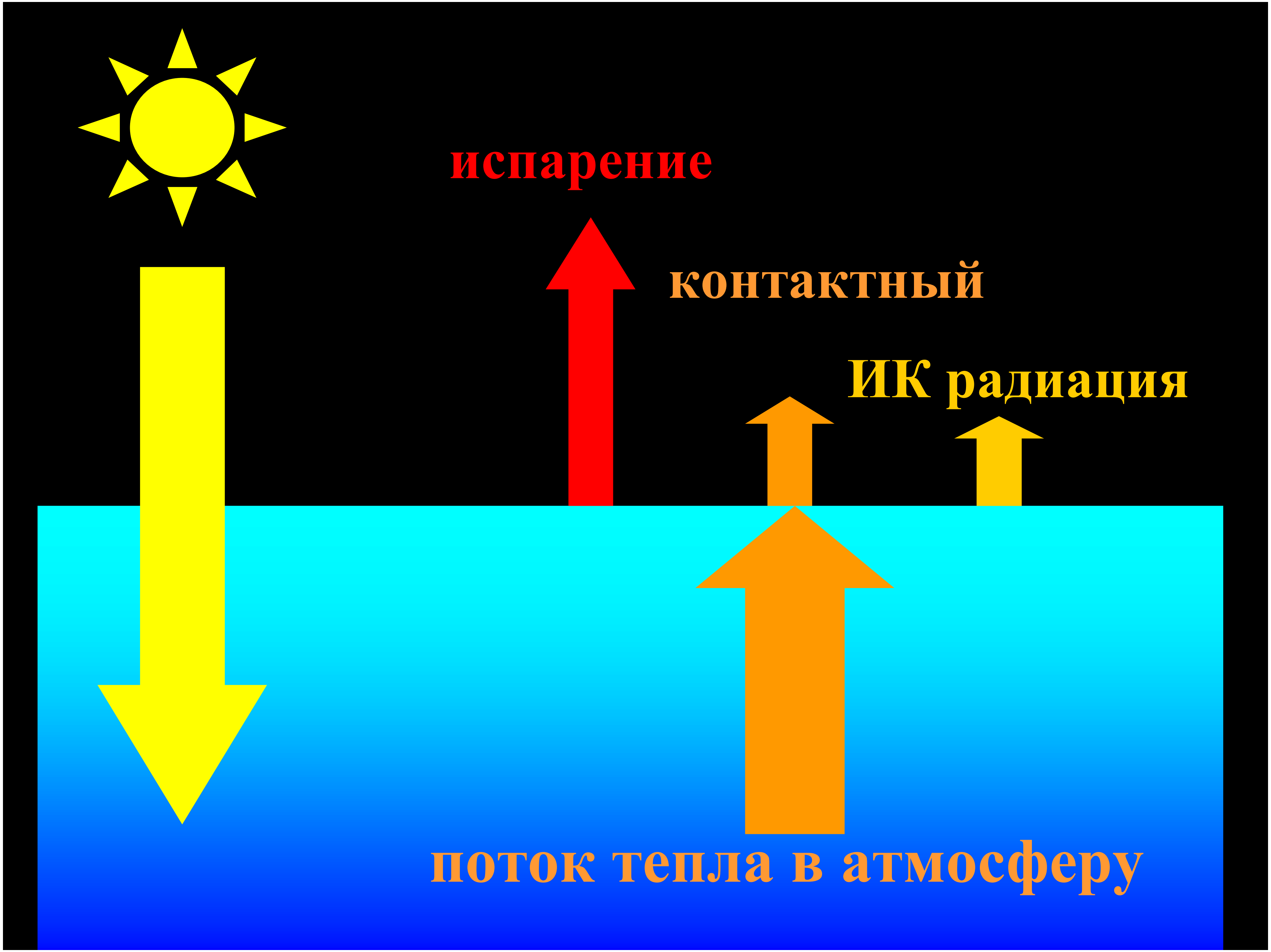
Источники турбулентности:

- Поверхностные волны
- Внутренние волны
- Течения

Масштабы турбулентных вихрей

$L_{\text{горизонт}} >> L_{\text{вертик}}$

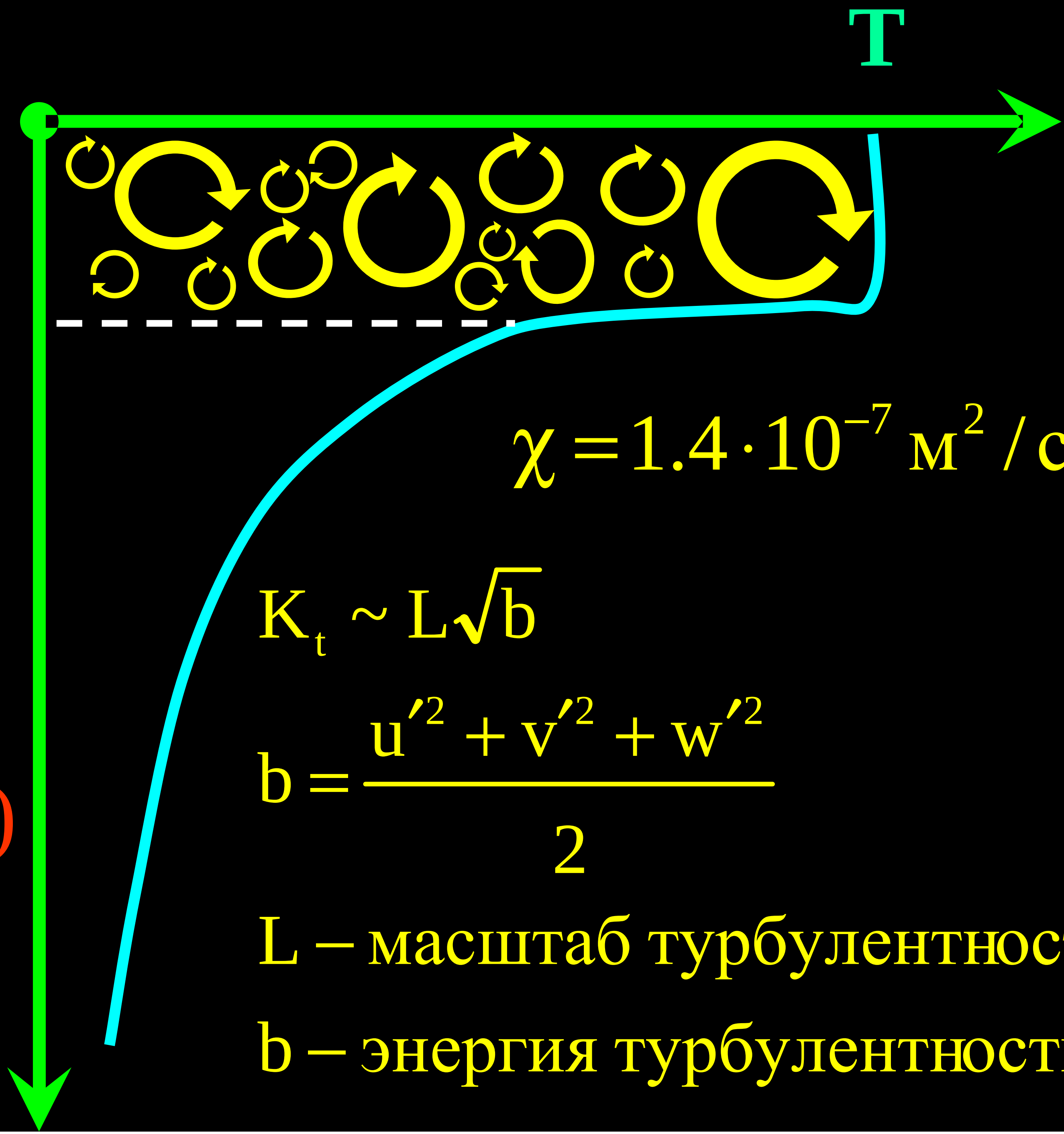
1 мм < L < 1000 км


испарение
контактный
ИК радиация
поток тепла в атмосферу

$$K_t >> \chi$$

$$\chi = \mathrm{const}$$

$$K_t = f(\mathbf{r}, t)$$



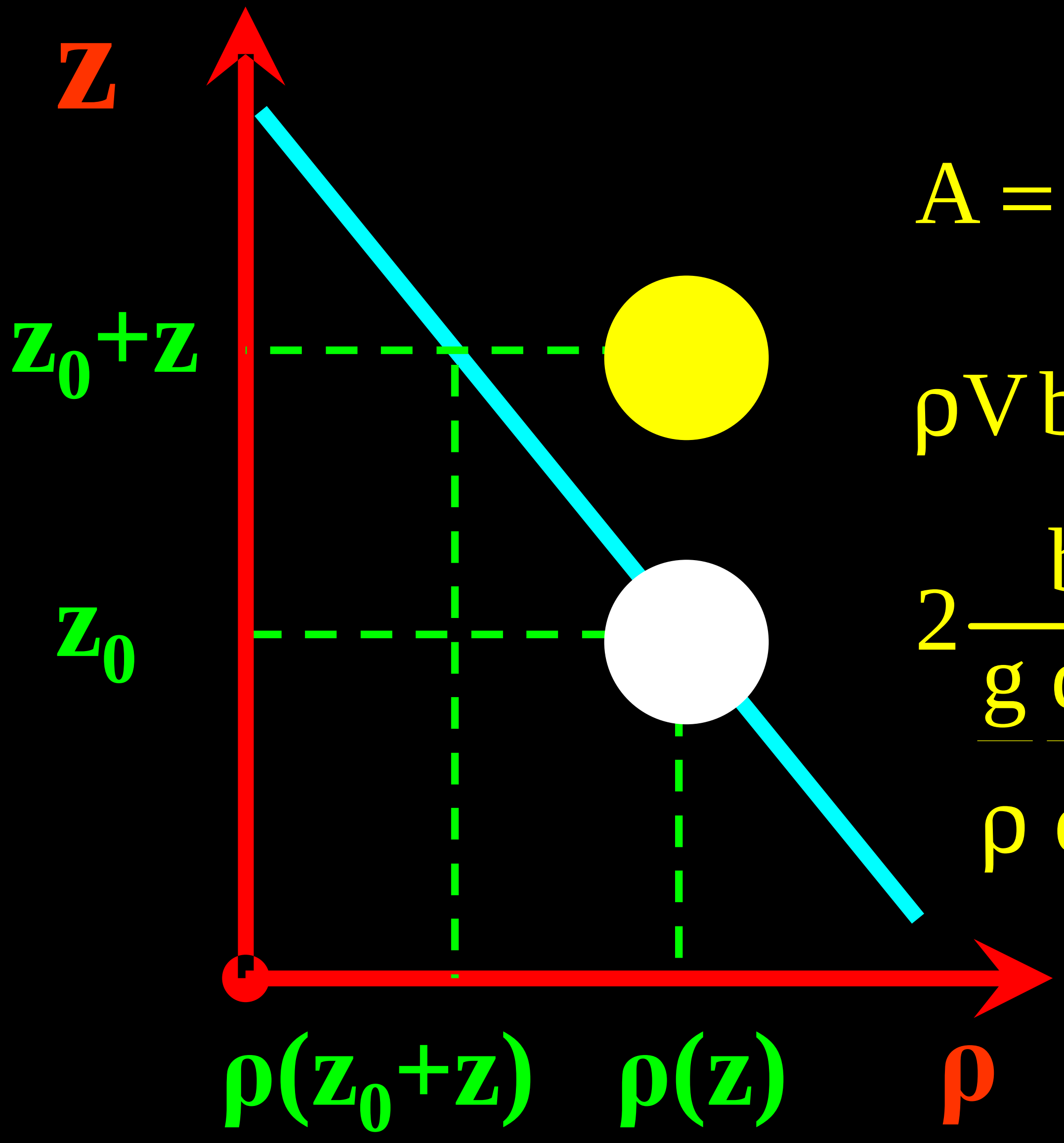
$$\chi = 1.4 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^2/\text{с}$$

$$K_t \sim L\sqrt{b}$$

$$b = \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2}$$

L – масштаб турбулентности

b – энергия турбулентности



$$F = Vg\frac{d\rho}{dz}z;$$

$$A = \int_0^z F(z)dz = Vg\frac{d\rho}{dz}\frac{z^2}{2}$$

$$\rho V b = A;$$

$$2\frac{b}{\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}} = z^2 \Rightarrow L \sim \frac{\sqrt{b}}{N}$$

Масштаб турбулентности в стратифицированной жидкости

$$L \sim \frac{\sqrt{b}}{N}$$

Масштаб турбулентности в однородной жидкости при наличии среднего течения

$$L \sim \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right) \Big/ \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)$$

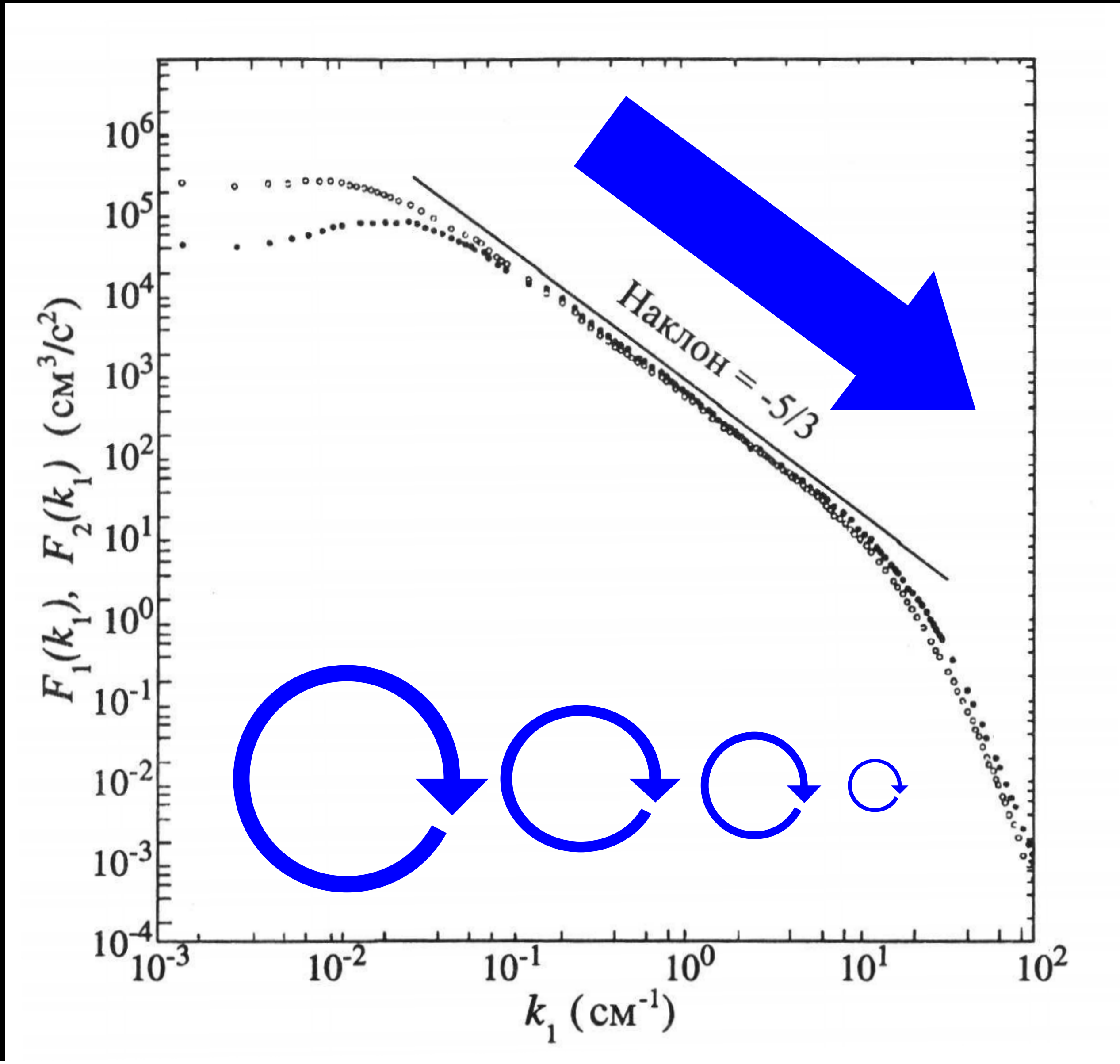
Диссипация энергии турбулентности

$$\frac{db}{dt}\left[\frac{м^2}{с^2 \cdot с}\right]$$

$$\frac{db}{dt} = f(b, L)$$

$$\frac{db}{dt} \neq f(\nu)$$

Спектр турбулентности



Тонкая термохалинная структура

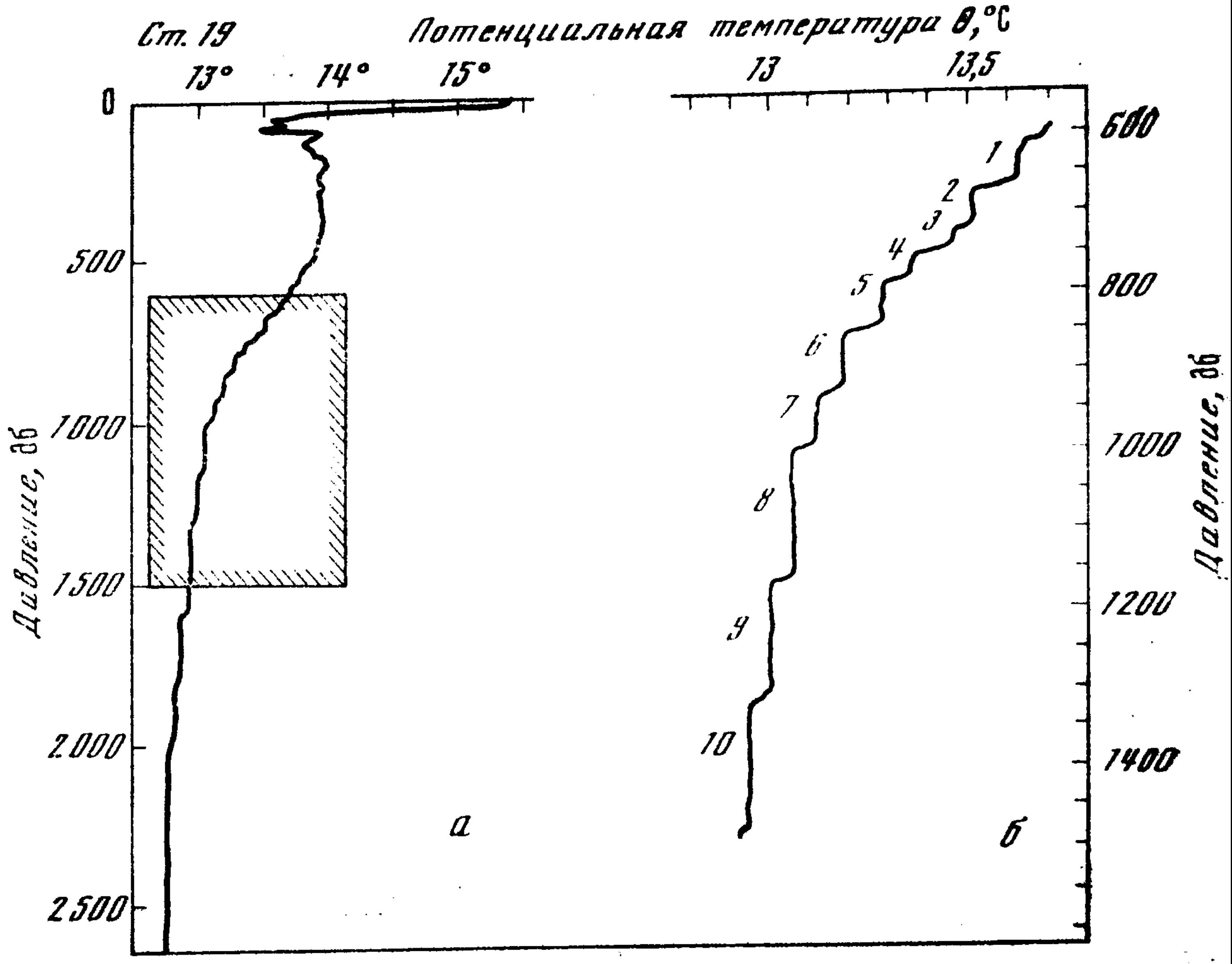


Рис. 8. Пример ступенчатого вертикального профиля температуры

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial b}{\partial t} = -\dfrac{g}{\rho_0} K_t \dfrac{\partial \rho}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial z} K_t \dfrac{\partial b}{\partial z} - \dfrac{b^{3/2}}{L} + \beta(z, t); \\
\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z} K_t \dfrac{\partial T}{\partial z}; \\
\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha\left(T - T_0\right)\right]; \\
K_t = L\sqrt{b}; \\
L = \sqrt{b} \Big/ \dfrac{g}{\rho} \dfrac{d\rho}{dz}.
\end{cases}
$$